FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

06.07.2023

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 17.07. statt.
Ggf. nötige mündliche Ergänzungsprüfungen finden voraussichtlich am 20./21.07. statt.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 10 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ_0	Bon.	Σ
Max	8	9	8	8	6	12	8	6	10	12	87	4	91

Note:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

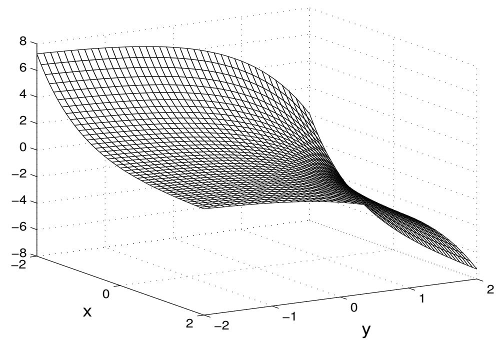
Die in den Bildern dargestellten Funktionen haben jeweils die Funktionsvorschrift

$$f(x, y) \;=\; a \cdot \mathrm{e}^{bx} + c \cdot \mathrm{e}^{dy}$$

mit speziellen $a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}$.

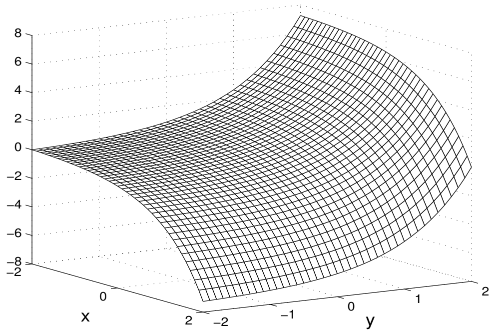
Geben Sie die konkreten Funktionsvorschriften zu den Bildern an.

a)



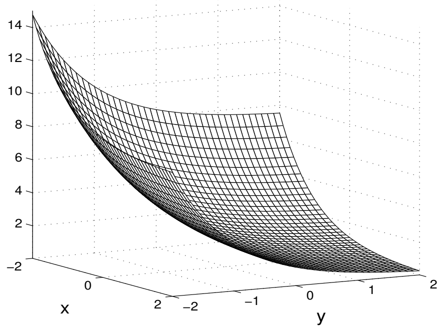
$f(x, y) \;=$

b)



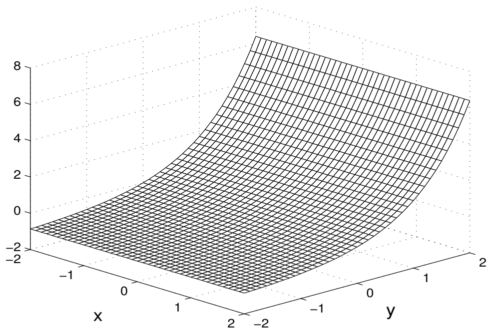
$f(x, y) \;=$

c)



$f(x, y) \;=$

d)



$f(x, y) \;=$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} x^3 y^2 \\ 2x^3 + y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie ausgehend von $\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{2}$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur bestimmung einer Nullstelle von f aus.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x^2 z \cdot \mathrm{e}^{xyz} \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

über den Bereich

$$D \;=\; [0,3] \times [0,1] \times [0,2].$$

(Tipp: Nutzen Sie eine geschickte Integrationsreihenfolge!)

Aufgabe 4 $(6 + 2 = 8$ Punkte$)$

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x + 4y + 5z \\ x \cdot y \\ y^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{F}$ und $\operatorname{rot} \vec{F}$.

b) Gibt es ein $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{F} = \operatorname{grad} \varphi$?

Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ zur Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y \;=\; 0$$

an.

Aufgabe 6 (8 + 4 = 12 Punkte, davon bis zu 4 Enthaltungspunkte)

Die beiden Funktionen $u(t)$ und $v(t)$, die die Populationsgröße bestimmter Spezies U bzw. V angeben, erfüllen das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u' &= 5 - v \\ v' &= u \cdot v. \end{aligned}$$

(Dabei wird davon ausgegangen, dass $u(t) \geq 0$ und $v(t) \geq 0$ ist.)

a) Kreuzen Sie die richtigen Zusammenhänge (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) in der folgenden Tabelle an.

Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

U vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		U vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U.			unabh. von V.	
	Enthaltung			Enthaltung	
V vermehrt sich mehr,	je größer U ist.		V vermehrt sich mehr,	je größer V ist.	
	je kleiner U ist.			je kleiner V ist.	
	unabh. von U.			unabh. von V.	
	Enthaltung			Enthaltung	

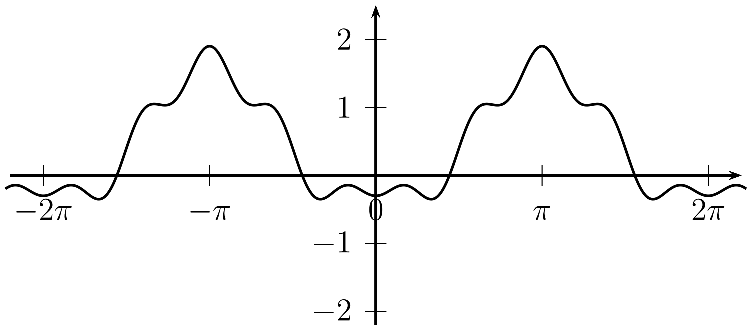
b) Führen Sie zu der Anfangssituation $u(0) = 2$ und $v(0) = 3$ einen Schritt des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.1$ durch.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Für die Fourierkoeffizienten der dargestellten 2π-periodischen Funktionen gilt

- $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$,
- einer der Fourierkoeffizienten $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$ ist gleich $+1$ oder -1, die anderen drei sind gleich Null,
- die weiteren Koeffizienten sind irgendwelche betragsmäßig kleine reelle Zahlen.

Geben Sie die richtigen Werte für $a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2$ und b_2 an.



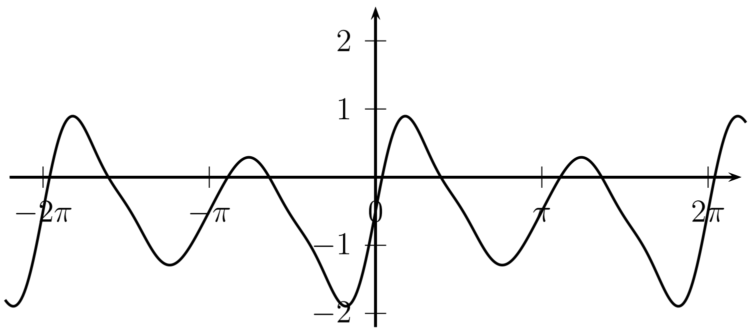
$a_0 \ =$

$a_1 \ =$

$b_1 \ =$

$a_2 \ =$

$b_2 \ =$



$a_0 \ =$

$a_1 \ =$

$b_1 \ =$

$a_2 \ =$

$b_2 \ =$

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Welche Funktion $f(t)$ besitzt als Laplace-Transformierte

$$F(s) \;=\; \frac{s+7}{s^2+2s+5}?$$

Aufgabe 9 ($5 + 5 = 10$ Punkte)

Eine Urne enthält n Kugeln ($n > 2$), von denen zwei schwarz und der Rest weiß sind.

Aus der Urne werden nun der Reihe nach Kugeln gezogen,

1) wobei die gezogene Kugel nach der Ziehung wieder in die Urne gelegt wird,
2) wobei die gezogene Kugel nach der Ziehung NICHT wieder in die Urne gelegt wird.

a) Sei konkret $n = 20$.

   Wie wahrscheinlich ist bei 1) bzw. bei 2), dass genau bei der sechsten Ziehung zum ersten mal eine schwarze Kugel gezogen wird?

b) Geben Sie für allgemeines n eine Formel für die Wahrscheinlichkeit bei 1) bzw. bei 2) an, dass genau bei der r-ten Ziehung zum ersten mal eine schwarze Kugel gezogen wird.

   Hinweis zu 2): Hier kann $r \leq n - 2$ angenommen werden.

   Tipp zu 2): Bei der r-ten Ziehung sind noch $n - r + 1$ Kugeln in der Urne.

Aufgabe 10 ($2 + 6 + 4 = 12$ Punkte, davon bis zu 3 Enthaltungspunkte)

Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu = 2$ und $\sigma = 0.5$.

a) Zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten f_X und f_Y in ein (gemeinsames) Koordinatensystem.

b) Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob der linke Ausdruck $<$, $=$ oder $>$ dem rechten Ausdruck ist, oder tragen Sie „E“ für Enthaltung ein.

Jeder richtig Eintrag zählt 1 Punkt, eine Enthaltung 0.5 Punkte; Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	$<$, $=$, $>$ oder „E“	
$P(X \in [-1, 1])$		$P(X \in [0, 2])$
$P(Y \in [-1, 1])$		$P(Y \in [0, 2])$
$P(X \in [1, 2])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 1])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [0, 2])$		$P(Y \in [1, 2])$
$P(X \in [2, \infty[)$		$P(Y \in]-\infty, 1]$

c) Geben Sie jeweils ein x_0 und ein y_0 an mit

$$P(X \leq x_0) \;=\; 0.8 \qquad \text{und} \qquad P(Y \leq y_0) \;=\; 0.8.$$