
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

14.03.2023

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Blätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 9 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

____

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ_0	Bon.	Σ
Max	8	9	8	10	14	6	11	12	9	87	4	91

Note:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $f(x,y) \;=\; y \cdot \mathrm{e}^{-x^2+4y}$.

Führen Sie ausgehend von $(x_0, y_0) = (2, 1)$ zwei Schritte des Gradientenverfahrens zur *Minimierung* von f mit Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ durch.

Aufgabe 2 $(4 + 5 = 9$ Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) \;=\; (1 + \mathrm{e}^{-t/5}) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie f für $t \in [0, 13]$.

b) Geben Sie eine Gleichung für die Tangente t an die Kurve für $t = 0$ an, und zeichnen Sie t in die Skizze aus a) ein.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von den Parametern a und b den Wert von

$$\int_{[0,2]\times[a,b]} (x^2 + y^3)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 4 $(2+4+4=10$ Punkte)

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in Kugelkoordinaten gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) \;=\; r^2 \cdot \cos\vartheta \qquad \text{und} \qquad \vec{F} \;=\; \operatorname{grad}\Phi.$$

a) Welchen Wert hat Φ an den (in kartesischen Koordinaten gegebenen) Punkten $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$?

b) Geben Sie $\vec{F}$ in (lokalen) Kugelkoordinaten an.

c) Sei $\vec{s}(t)$ der Weg, der geradlinig vom Punkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ zum Punkt $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$ führt.

Welchen Wert hat das Wegintegral $\int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$?

(Hinweis: Diese Teilaufgabe können Sie auch ohne Bearbeitung von b) lösen.)

Aufgabe 5 (14 Punkte, davon 7 Enthaltungspunkte)

Sind die folgenden Aussagen zu Differenzialgleichungen (DGL) bzw. Anfangswertproblemen (AWP) richtig?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Tipp für die ersten beiden Aussagen: Stellen Sie sich das Richtungsfeld vor!

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
Sämtliche Lösungen zur DGL $y' = x^2 \cdot y^2$ sind monoton wachsend.			
Sämtliche Lösungen zur DGL $y' = x + y$ sind für $x > 0$ monoton wachsend.			
Ist y eine Lösung zur DGL $y' = x^2 \cdot y$, so ist auch $2 \cdot y$ eine Lösung der DGL.			
Ist y eine Lösung zur DGL $y' = x^2 \cdot y$, so ist auch $y + 1$ eine Lösung der DGL.			
Zur DGL $y' = 1 - y$ gibt es eine Lösung, die konstant ist.			
Mit dem Euler-Verfahren kann man zu einem AWP mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nur den Lösungsverlauf für $x \geq x_0$ ermitteln.			
Konvergiert beim Euler-Verfahren zu einem AWP der Wert von $y(x_{\text{end}})$ bei Schrittweite $\to 0$ gegen einen Wert y_{end}, so existiert die tatsächliche Lösung des AWP bis x_{end} und hat dort den Wert y_{end}.			

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die beiden Funktionen $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x^3$ sind Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y \;=\; 0.$$

(Das brauchen Sie nicht nachzurechnen.)

Wie lautet eine Lösung y der Differenzialgleichung, die die Anfangsbedingungen

$$y(2) = 1, \qquad y'(2) = 0$$

erfüllt?

Aufgabe 7 $(8 + 3 = 11$ Punkte)

a) Berechnen Sie die *komplexen* Fourierkoeffizienten c_n zur Fourierreihe zu

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) \; = \; \mathrm{e}^x,$$

(bzw. der entsprechend 2π-periodisch fortgesetzten Funktion), und formen Sie sie so um, dass Sie entscheiden können, welche der folgenden Darstellungen richtig ist:

1) $c_n \; = \; \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi} - n^2}{4\pi} \cdot (1 + \mathrm{j}n),$

2) $c_n \; = \; \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2\pi(1 + n^2)} \cdot (1 + \mathrm{j}n),$

3) $c_n \; = \; \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi n^2} - 1}{4\pi} \cdot (1 + \mathrm{j}n).$

b) Bei a) erhalten Sie speziell $c_1 = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{4\pi} \cdot (1 + \mathrm{j})$ und $c_{-1} = \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{4\pi} \cdot (1 - \mathrm{j})$.

Nutzen Sie dies, um die *reellen* Fourierkoeffizienten a_1 und b_1 zu bestimmen.

Aufgabe 8 ($2 + 4 + 3 + 3 = 12$ Punkte)

Mäxchen kommt immer zu spät. Die Zeit, um die er sich verspätet, ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.4\,\mathrm{min}^{-1}$.

a) Wieviel Minuten kommt Mäxchen im Durchschnitt zu spät?

b) Mäxchen will einen Bus erreichen und plant so, dass er drei Minuten vor der Busabfahrt an der Haltestelle sein will. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Bus verpasst?

c) Wieviel Minuten vor der Busabfahrt sollte Mäxchen planen, an der Haltstelle zu sein, damit er den Bus mit 90-prozentiger Sicherheit erreicht?

d) Bei welchem Parameter λ reicht es, dass er plant, drei Minuten vor Abfahrt an der Haltestelle zu sein, und den Bus dabei mit 90-prozentiger Sicherheit erreicht?

Aufgabe 9 ($5 + 4 = 9$ Punkte)

Bei einem Zufallsexperiment, das natürliche Zahlen als Werte liefert, ergibt eine Stichprobe aus 9 Beobachtungen

4 mal „1“, 2 mal „3“, 1 mal „5“, 1 mal „6“, 1 mal „15“.

a) Geben Sie Mittelwert $\overline{x}$, Standardabweichung s und Median x_m der Stichprobe an.

b) Der Stichprobe wird eine zehnte Beobachtung x_{10} hinzugefügt.

Kann es passieren, dass dadurch

b1) der Mittelwert b2) der Median

größer als 15 wird?

Falls „ja“: Geben Sie eine solche Beobachtung an!
Falls „nein“: Begründen Sie Ihre Aussage!