
(Name) (Vorname) (Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

24.09.2021

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Formelblätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 9 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ_0	Bon.	Σ
Max	20	12	10	12	4	9	11	6	12	96	4	100

Note:

Aufgabe 1 $(10 + 10 = 20$ Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle (bzgl. des Ursprungs) rotationssymmetrischen differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$f(0,0) = 0$			
$f(2,1) = f(1,2)$			
$f(1,1) = f(2,0)$			
$f(3,4) = f(5,0)$			
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) = 0$.			
Für jede Stelle $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, 0) = 0$.			
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.			
Für jede Stelle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ steht $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, senkrecht auf $\vec{x}$.			
Für den Kreis K_1 um den Ursprung mit Radius 1 gilt $\int_{K_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0$.			
Für $D_1 = [0,1] \times [0,1]$ und $D_2 = [-1,0] \times [0,1]$ gilt $\int_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$.			

Aufgabe 2 ($4 + 8 = 12$ Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) \quad = \quad \begin{pmatrix} x + z^2 - 2 \\ x \cdot \mathrm{e}^{xy} + 1 \\ x^2 \cdot z + 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Jakobimatrix J_f zu f an.

b) Führen Sie ausgehend von $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ einen Schritt des mehrdimensionalen Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f aus.

Aufgabe 3 ($2 + 8 = 10$ Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \;=\; x^2.$$

a) Drücken Sie f in Polarkoordinaten aus.

b) Bestimmen Sie $\int\limits_{K_2} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$, wobei K_2 der Kreis mit Radius 2 um den Ursprung ist.

Aufgabe 4 $(6 + 6 = 12$ Punkte$)$

Im $\mathbb{R}^3$ sei

- A der Einheitskreis in der (x, y)-Ebene und
- $\vec{r}$ ein Weg, der ausgehend von $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ diesen Einheitskreis in der (x, y)-Ebene umrandet.

Gelten bzgl. dieser Fläche A bzw. dieses Weges $\vec{r}$ die folgenden Aussagen für alle Vektorfelder

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}?$$

Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

		gilt	gilt nicht	Enthaltung
Wenn überall $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{A} = 0$			
	$\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$			
Wenn überall $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{A} = 0$			
	$\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$			
Wenn überall $F_3 = 0$ ist, so ist	$\iint \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{A} = 0$			
	$\int \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = 0$			

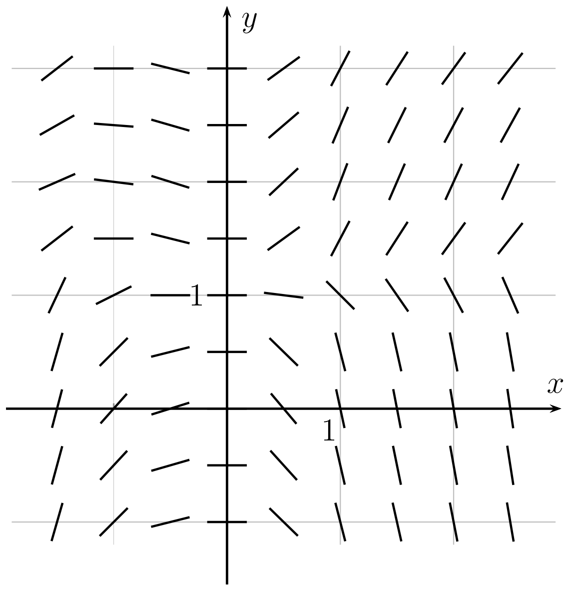
Aufgabe 5 ($2 + 2 = 4$ Punkte)

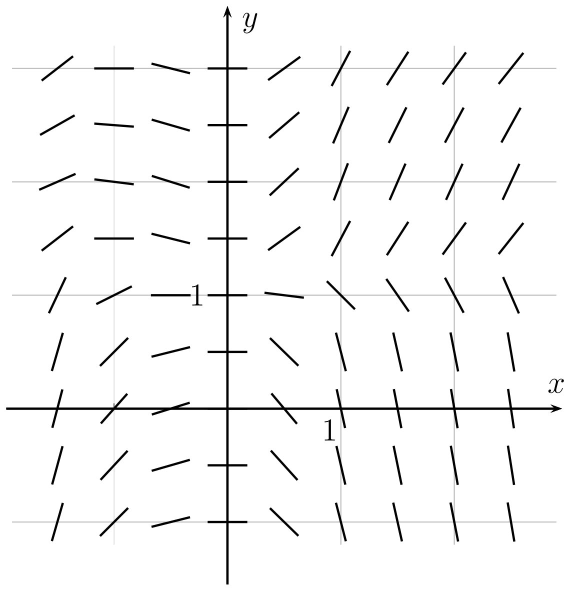
Gegeben ist das abgebildete Richtungsfeld zu einer Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$.

Gesucht sind approximative Lösungsverläufe zur Anfangsbedingung $y(-1) = 0.5$.

a) Zeichnen Sie in das linke Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch vier Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 0.5 erhält.

b) Zeichnen Sie in das rechte Diagramm den Lösungsverlauf ein, den man durch drei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite 1 erhält.





Aufgabe 6 (9 Punkte)

Geben Sie eine Lösung $y(t)$ zur Differenzialgleichung

$$y'' + 2y' + y \;=\; 5 \cdot \sin(2t)$$

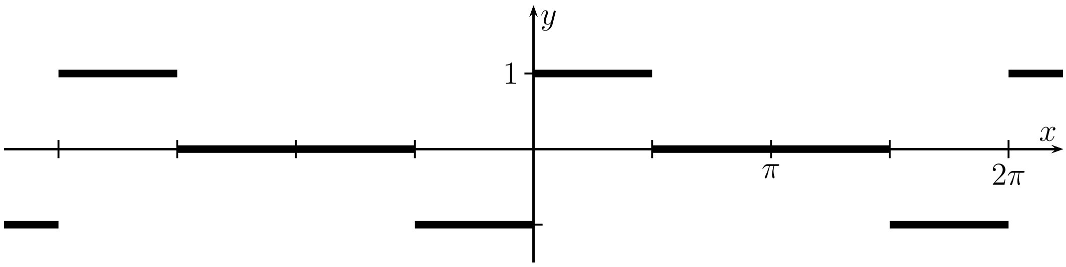
mit Hilfe einer komplexen Ansatzfunktion an.

Aufgabe 7 (11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in]0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{, falls } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ -1 & \text{, falls } x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

(s. Skizze).

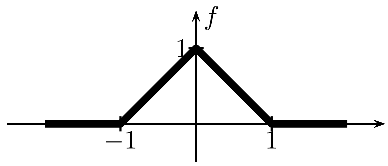


Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n und geben Sie den Beginn der Fourierreihe zu f bis (inklusive) $n = 5$ an.

(Tipp: Nutzen Sie Symmetrieüberlegungen!)

Aufgabe 8 $(3 + 3 = 6$ Punkte)

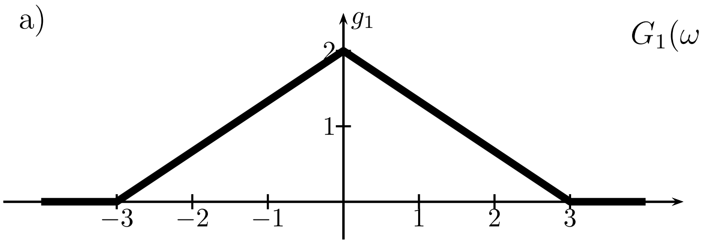
Die Fouriertransformation zu der abgebildeten Dreiecksfunktion f lautet



$$F(\omega) \;=\; 2 \cdot \frac{1 - \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

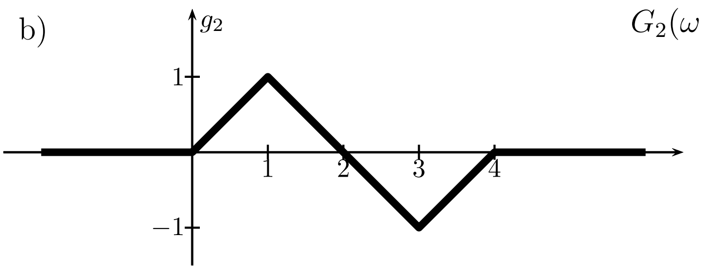
Geben Sie die Fouriertransformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an.

a)



$G_1(\omega) \;=$

b)



$G_2(\omega) \;=$

Aufgabe 9 $(3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Punkte)

Die Zufallsvariable X besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{c}{x^3} & \text{, falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

a) Welchen Wert hat c, damit f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in $[2; 3]$?

c) Für welchen Wert $x_{0,5}$ gilt, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, kleiner als $x_{0,5}$ zu sein, gleich 0,5 ist?

d) Wie groß ist der Erwartungswert von X?

Hinweis: Wenn Sie bei a) für c kein Ergebnis herausbekommen haben, können Sie bei b) bis d) c als Parameter nutzen.