(Name)	(Vorname)	(Matrikelnummer)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik

Prof. Georg Hoever

21.09.2020

Klausur zum Fach
Höhere Mathematik 2 für Elektrotechnik

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Hilfsmittel:

- mein Buch „Höhere Mathematik kompakt“ (als Buch oder ausgedruckt) und das Skript zum zweiten Teil (jeweils inklusive handschriftlicher Eintragungen),
- zwei (doppelseitig) handgeschriebene Formelblätter,
- ein einfacher Taschenrechner (nicht grafikfähig).

Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen auf diese Aufgabenblätter.

Das Verlassen des Hörsaals während der Klausur ist nicht gestattet.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie die obigen Klausurbedingungen gelesen haben, und dass alle 8 Aufgaben in gut leserlichem Druck vorliegen.

(Unterschrift)

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Max	9	12	6	10	12	10	9	12	80

Note:

Aufgabe 1 (maximal 9, minimal 0 Punkte)

Für welche in der Tabelle unten aufgeführten Paramterwerte ergibt die Menge der

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ r \cdot \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

(entspricht Kugelkoordinaten) eine Halbkugel?

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Jeder richtige Eintrag zählt $+1.5$, jeder falsche -1.5 Punkte; kein Eintrag zählt 0 Punkte.

	ist Halbkugel	ist keine Halbkugel
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \vartheta \in [0,\pi]$		
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,\frac{\pi}{2}], \quad \vartheta \in [0,2\pi]$		
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\pi,\pi], \quad \vartheta \in [0,\frac{\pi}{2}]$		
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$		
$r \in [0,1], \quad \varphi \in [-\pi,\pi], \quad \vartheta \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$		
$r \in [-1,1], \quad \varphi \in [0,\pi], \quad \vartheta \in [0,\frac{\pi}{2}]$		

Aufgabe 2 ($8 + 4 = 12$ Punkte)

Für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird die Formel

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = (\operatorname{grad} f) \cdot g + f \cdot \operatorname{grad} g$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie konkret, dass die Formel gilt für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy^2, \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = \sin(x^2 + y).$$

b) Begründen Sie für allgemeine Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dass die Formel gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im folgenden sind drei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ angegeben bestehend aus der Kombination einer schnellen und einer langsamen Kreis- bzw. Cosinusbewegung.

Welches der Bilder unten gehört zu welcher Funktion? Tragen Sie die entsprechende Nummer ein!

(Nicht alle Bilder kommen vor!)

	Bild-Nr.
$f(t) \;=\; 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(8t) \\ \sin(8t) \end{pmatrix}$	
$f(t) \;=\; (2+\cos(8t)) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	
$f(t) \;=\; 3\cos(8t) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$	

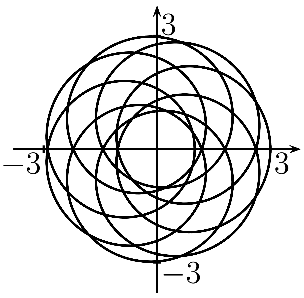


Bild 1

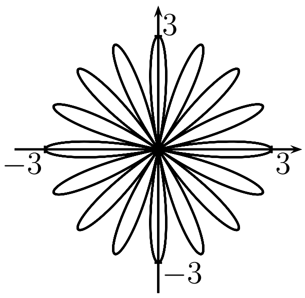


Bild 2

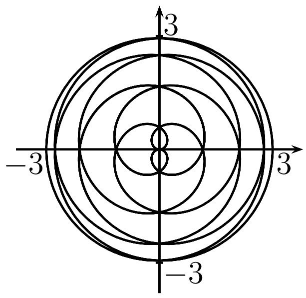


Bild 3

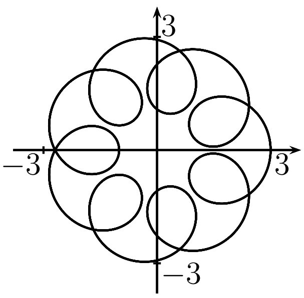


Bild 4

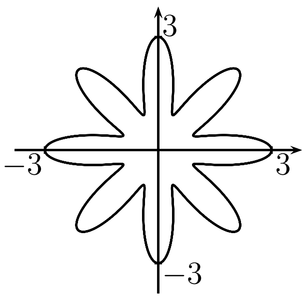


Bild 5

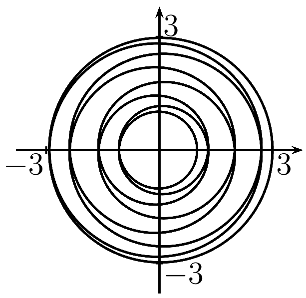


Bild 6

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie zu $D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$ das Integral

$$\int\limits_D (x + y) \cdot \cos(x \cdot y)\, \mathrm{d}(x, y).$$

Tipp: Spalten Sie das Integral entsprechend der Summe auf und verwenden Sie unterschiedliche Integrationsreihenfolgen!

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Für das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \vec{F}(x, y, z) \ = \ \begin{pmatrix} z^4 - 3y^2 \\ -6xy \\ 4xz^3 \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ (das brauchen Sie nicht nachzurechnen).

Geben Sie die Werte der Wegintegrale $\int \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{r}$ zu den folgenden Wegen an. Begründen Sie Ihre Angaben!

Tipp: Sie brauchen höchstens einmal wirklich ein Integral zu berechnen!

a) $\vec{r}_a : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ \vec{r}_a(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix},$

b) $\vec{r}_b : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ \vec{r}_b(t) = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1-t} \\ t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \end{pmatrix},$

c) $\vec{r}_c : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ \vec{r}_c(t) = \begin{pmatrix} t + \sqrt{1-t} \\ 1 \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}.$

Aufgabe 6 $(4 + 6 = 10$ Punkte)

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y' \;=\; y - 2x^2.$$

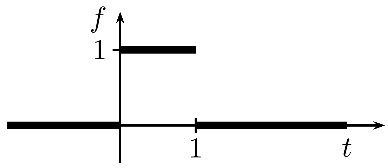
a) Geben Sie ein quadratisches Polynom an, das die Differenzialgleichung erfüllt.

b) Führen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Lösung der Differenzialgleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = 3$ mit Schrittweite 0.5 aus und skizzieren Sie die Situation.

Aufgabe 7 (3 + 6 = 9 Punkte)

a) Begründen Sie, dass die Laplace-Transformation zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(t) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in]0,1[, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



(s. Skizze) gleich

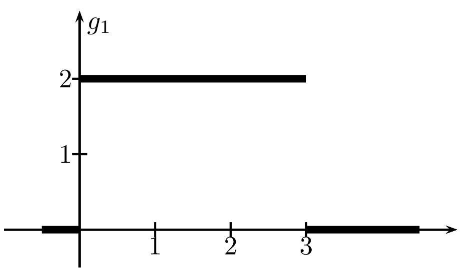
$$F(s) \;=\; \frac{1-\,\mathrm{e}^{-s}}{s}$$

ist.

b) Geben Sie die Laplace-Transformationen zu den wie folgt dargestellten Funktionen g_i an.

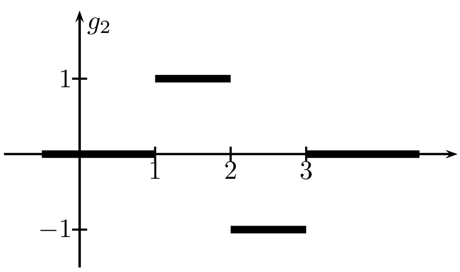
Tipp: Sie können die Angaben aus a) nutzen; Sie brauchen die entstehenden Ausdrücke nicht zu vereinfachen.

b1)



$G_1(s) \;=$

b2)



$G_2(s) \;=$

Aufgabe 8 $(5 + 3 + 4 = 12$ Punkte)

Eine Firma will Nägel der Länge 20mm herstellen. Die tatsächliche Länge der Nägel ist normalverteilt um den Normwert 20mm.

a) Die Firma arbeitet mit einer Prozessgenauigkeit von $\sigma = 0.5$mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung um

   a1) mehr als 1mm   a2) mehr als 0.8mm

   vom Normwert?

b) Wie groß muss die Prozessgenauigkeit σ sein, damit nur 5% der produzierten Nägel eine Längenabweichung von mehr als 0.5mm von den 20mm haben?

c) Das Nachmessen von fünf Nägeln ergibt Längen

   19.8mm, 20.8mm, 20.1mm, 19.4mm und 20.4mm.

   Wie groß sind Mittelwert $\bar{x}$, der Median x_m und die Standardabweichung s dieser Stichprobe?

(Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.)