

Skript zur Vorlesung

Mathematik 2

Teil 2

Georg Hoever

Fachbereich Elektrotechnik und
Informationstechnik
FH Aachen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1. Vektoranalysis	2
1.1. Weg- und Flächenintegral	2
1.2. Divergenz und Rotation	4
1.2.1. Divergenz	4
1.2.2. Rotation	5
1.2.3. Zusammenhänge zwischen div , rot und grad	6
2. Gewöhnliche Differenzialgleichungen	8
2.1. Grundlagen	8
2.1.1. Einführung	8
2.1.2. Richtungsfeld und Euler-Verfahren	9
2.2. Lineare Differenzialgleichungen	11
2.2.1. Lösungstheorie	11
2.2.2. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	13
2.2.3. Die Schwingungsgleichung	15
2.3. Ausblick	18
2.3.1. Differenzialgleichungssysteme	18
2.3.2. Partielle Differenzialgleichungen	20
3. Fourier- und Laplace-Transformation	21
3.1. Die Fourierreihe	21
3.2. Die Fourier-Transformation	26
3.2.1. Definition	26
3.2.2. Eigenschaften der Fourier-Transformation	28
3.3. Diskrete Fourier-Transformation	30
3.4. Die Laplace-Transformation	36
3.4.1. Definition	36
3.4.2. Anwendungen	40
4. Wahrscheinlichkeit und Statistik	43
4.1. Binomialkoeffizient und Kombinatorik	43
4.1.1. Binomialkoeffizient	43
4.1.2. Kombinatorik	45
4.2. Wahrscheinlichkeit	48
4.2.1. Diskrete Ereignisse	48
4.2.2. Wahrscheinlichkeitsdichte	52
4.3. Zufallsvariablen	57
4.4. Statistik	60

5. Informatik-relevante Themen	62
5.1. Vollständige Induktion	62
5.2. Quantoren	64
5.3. Relationen	65
A. Ergänzungen zu Differenzialgleichungen	72
A.1. Trennung der Variablen	72
A.2. Homogene lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	73
A.3. Variation der Konstanten	74
B. Ergänzungen zur Fouriertheorie, Faltung und Dirac-Funktion	75
B.1. Fourierreihe im Vektorraum	75
B.2. Diskrete Fouriertransformation	77
B.2.1. Nachweis der gelingenden Hin- und Rücktransformation	77
B.2.2. Fast-Fourier-Transformation	77
B.3. Die Faltung	79
B.4. Die Diracsche- δ -Funktion	83
C. Tabelle Standardnormalverteilung	87
Index	88

Vorwort

Dieses Skript enthält die Themen, die ich in meinem Teil der Mathematik 2 behandle, die aber nicht in meinem Buch „Höhere Mathematik kompakt“ enthalten sind. Das Skript richtet sich sowohl an die Elektrotechniker als auch an die Informatiker. Einige Themen werden bei beiden Zielgruppen behandelt, andere nur bei den Elektrotechnikern oder nur bei den Informatikern. Konkret: Nicht behandelt und damit auch nicht Klausur-relevant sind aus diesem Skript-Teil

- für die Informatik:
 - Kapitel 1 (Vektoranalysis),
 - Abschnitt 2.2 (Lineare Differenzialgleichungen),
 - Abschnitt 3.2.2 (Eigenschaften der Fourier-Transformation),
 - Abschnitt 3.4 (Laplace-Transformation),
- für die Elektrotechnik:
 - Abschnitt 3.3 (Diskrete Fourier-Transformation),
 - Abschnitt 4.1 (Binomialkoeffizient und Kombinatorik),
 - Kapitel 5 (Informatik-relevante Themen).

Wie im ersten Teil finden sich am Ende der einzelnen Abschnitte wieder Verweise auf Kapitel von Lehrbüchern, in denen der vorgestellte Stoff teilweise ähnlich, teilweise in einer alternativen Form dargestellt wird. Ich beziehe mich wie im ersten Teil dabei auf die folgenden Bücher:

- [KSt] *Mathematik für das Ingenieurstudium*, Jürgen Koch, Martin Stämpfle, Hanser
- [Walz] *Mathematik für Fachhochschule, Duale Hochschule und Berufsakademie*, Guido Walz, Spektrum Akademischer Verlag
- [Stingl] *Mathematik für Fachhochschulen*, Peter Stingl, 7. Auflage, Hanser
- [FF] *Mathematik 2*, Albert Fetzner, Heiner Fränkel, 5. Auflage, Springer
- [Leu] *Mathematik 2*, Wilhelm Leupold, 2. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig
- [Brill] *Mathematik für Informatiker*, Manfred Brill, 2. Auflage, Hanser
- [Hart] *Mathematik für Informatiker*, Peter Hartmann, 1. Auflage, Vieweg
- [SS] *Mathematik kompakt*, Yvonne Stry, Rainer Schwenkert, 1. Auflage, Springer
- [Pap2] *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2*, Lothar Papula, 11. Auflage, Vieweg
- [Pap3] *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3*, Lothar Papula, 5. Auflage, Vieweg

Aachen, im März 2018,

Georg Hoever

1. Vektoranalysis

1.1. Weg- und Flächenintegral

Bei einer Bewegung in einem Kraftfeld \vec{F} , das immer senkrecht zur Kraft verläuft, wird keine Arbeit verrichtet. Die Arbeit W hängt vom Skalarprodukt zwischen Wegrichtung und Kraft ab.

Diskretisiert ist

$$W \approx \sum \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

Bei immer feinerer Diskretisierung erhält man das *Wegintegral*

$$W = \int \vec{F} d\vec{r}.$$

Ist der Weg in parametrisierter Form $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, gegeben, so ist

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i) \approx \vec{r}'(t_i) \cdot \Delta t$$

und man erhält $W \approx \sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}'(t_i) \cdot \Delta t$. Bei immer feinerer Diskretisierung erhält man ein gewöhnliches Integral:

Definition 1.1

Zu einem Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einem Weg \vec{r} in \mathbb{R}^n , $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ ist das *Wegintegral* W gegeben durch

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

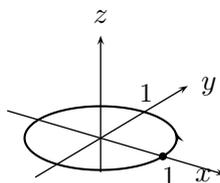
Ist der Weg \vec{r} geschlossen, d.h. $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, so schreibt man auch $\oint \vec{F} d\vec{r}$.

Beispiel 1:

Betrachtet wird das dreidimensionale Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x + z \\ xy^2 \end{pmatrix}$ und der

Weg

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$



(\vec{r} läuft den Rand des in der (x, y) -Ebene um den Ursprung liegenden Kreises mit Radius 1 ab).

Dann ist

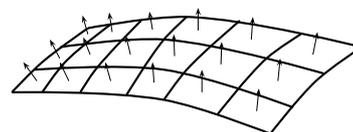
$$\begin{aligned}\oint \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t + 0 \\ \cos t \cdot (\sin t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Stellt ein (dreidimensionales) Vektorfeld \vec{F} eine Flussdichte dar, so kann man sich für den Fluss durch eine (zweidimensionale) Fläche interessieren. Eine Flussdichte parallel zur Fläche erzeugt keinen Fluss durch die Fläche; maximalen Fluss erhält man bei einer Flussdichte senkrecht zur Fläche. Ordnet man bei einer Diskretisierung jedem Flächenelement ΔA einen Flächenelement-Vektor $\Delta \vec{A}$ zu, der senkrecht zur Fläche steht und als Betrag den Flächeninhalt hat, so berechnet sich der Fluss Φ

$$\Phi \approx \sum \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{A}_i.$$

Bei immer feinerer Diskretisierung erhält man das *Flächenintegral*

$$\Phi = \iint \vec{F} d\vec{A}.$$



Beispiel 2:

Die Fläche A sei der in der (x, y) -Ebene um den Ursprung liegenden Kreis K_1 mit Radius 1 (nach oben orientiert).

Dann sind die Flächenelement-Vektoren $\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta A \end{pmatrix}$,

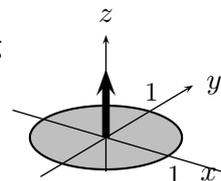
und zu einem Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ ist

$$\Phi \approx \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{A} = \sum \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta A \end{pmatrix} = \sum F_3 \cdot \Delta A$$

und daher bei immer feinerer Diskretisierung $\Phi = \iint_{K_1} F_3 d(x, y)$.

Bei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy-1 \\ -y^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich beispielsweise

$$\Phi = \iint_{K_1} \begin{pmatrix} 2xy-1 \\ -y^2 \\ 2 \end{pmatrix} d\vec{A} = \iint_{K_1} 2 d(x, y) = 2 \cdot \pi.$$



Literatur: [Stingl] 8.9, 8.10; [FF] 3.4.3; [Leu] 10.3.7; [Pap3] I.7, I.8.1, I.8.2

1.2. Divergenz und Rotation

1.2.1. Divergenz

Definition 1.2

Zu einem Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(\dots) \\ \vdots \\ F_n(\dots) \end{pmatrix}$ heißt

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n$$

Divergenz.

Bemerkungen:

1. Die Divergenz beschreibt die Quellen ($\operatorname{div} \vec{F} > 0$) oder Senken ($\operatorname{div} \vec{F} < 0$) eines Feldes.
2. Mit dem Nabla-Operator $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ kann man auch schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}, \text{ denn } \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1:

Zu $\vec{F}(x, y, z) = (0, xy, -xz)$ ist

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz) = 0 + x - x = 0.$$

Das Feld ist also Quellen- und Senkenfrei.

Das, was aus einem Gebiet herausfließt, entspricht dem, was in dem Gebiet erzeugt wird:

Satz 1.3 (Integralsatz von Gauss)

Umschließt die Fläche A das Volumen V , so gilt

$$\iint \vec{F} \, d\vec{A} = \iiint \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Literatur: [Stingl] 8.11; [FF] 3.4.5; [Leu] 10.3.4; [Pap3] I.5.1, I.9.1

1.2.2. Rotation

So wie die Divergenz die Quellen/Senken eines Feldes beschreibt, so beschreibt die sogenannte Rotation die Wirbelstärke:

Definition 1.4

Zu einem Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ heißt

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix}$$

Rotation.

Bemerkung:

Mit dem Nabla-Operator ∇ kann man auch schreiben:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}, \text{ denn } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1:

Zu $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x + z \\ xy^2 \end{pmatrix}$ ist

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x + z \\ xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x + z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + z) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - 1 \\ -y^2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wirbelstärken auf einer Fläche lassen sich am Flächenrand ablesen:

Satz 1.5 (Integralsatz von Stokes)

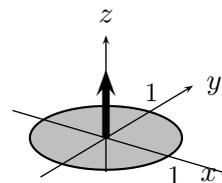
Wird die Fläche A von Weg r umschlossen, so gilt

$$\oint \vec{F} \, d\vec{r} = \iint \text{rot } \vec{F} \, d\vec{A}.$$



Beispiel 2:

Sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x+z \\ xy^2 \end{pmatrix}$ wie in Beispiel 1 und



A der in der (x, y) -Ebene um den Ursprung liegenden Kreis K_1 mit Radius 1 (nach oben orientiert) (wie in Beispiel 2 von Abschnitt 1.1).

A wird berandet von $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ (vgl. Bsp. 1 von Abschnitt 1.1).

Wie in den erwähnten Beispielen berechnet, ist tatsächlich

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 2\pi = \iint \begin{pmatrix} 2xy^{-1} \\ -y^2 \\ 2 \end{pmatrix} d\vec{A} = \iint \text{rot } \vec{F} d\vec{A}.$$

Literatur: [Stingl] 8.11; [FF] 3.4.5; [Leu] 10.3.5; [Pap3] I.5.2, I.9.2

1.2.3. Zusammenhänge zwischen div, rot und grad**Satz 1.6**

1. Für $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt: $\text{div rot } \vec{F} = 0$.
2. Für $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\text{rot grad } \varphi = 0$.

Die zweite Aussage des Satzes besagt, dass Gradientenfelder wirbelfrei sind. Umgekehrt ist jedes wirbelfreie Feld ein Gradientenfeld:

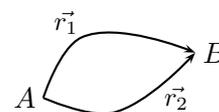
Satz 1.7

Ist $\text{rot } \vec{F} = 0$, so gibt es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } \varphi = \vec{F}$.

Bemerkung:

In Analogie zum Eindimensionalen könnte man φ als Stammfunktion bezeichnen. Gebräuchlich ist allerdings der Name *Potenzialfunktion*.

Satz 1.5 besagt, dass bei einem wirbelfreien Feld - also nach Satz 1.7 einem Gradientenfeld - das Integral über einen geschlossenen Weg gleich 0 ist. Dies hat zur Folge, dass Integrale von einem Punkt A zu einem Punkt B unabhängig vom Weg sind; sie hängen also nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.



Satz 1.8

Ist $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Gradientenfeld zur Potenzialfunktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, also $\vec{F} = \text{grad } \varphi$, so gilt für jeden Weg \vec{r} zwischen zwei Punkten $A, B \in \mathbb{R}^3$:

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Insbesondere gilt $\oint \vec{F} \, d\vec{r} = 0$ bei einem geschlossenen Weg \vec{r} .

Bemerkungen:

1. Dies entspricht im Eindimensionalen $\int_a^b \varphi'(x) \, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$.
2. Es gilt sogar auch die Umkehrung:

Ist $\int \vec{F} \, d\vec{r}$ nur abhängig von den Endpunkten A und B des Weges und unabhängig vom Weg, so ist \vec{F} ein Gradientenfeld, d.h. es gibt φ mit $\vec{F} = \text{grad } \varphi$ und es gilt

$$\int_A^B \vec{F} \, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Literatur: [Stingl] 8.11; [Pap3] I.5.3

2. Gewöhnliche Differenzialgleichungen

2.1. Grundlagen

2.1.1. Einführung

Wir betrachten hier reellwertige Funktionen, die von einer Variablen abhängen. Schreibweise $y = y(x)$ oder $y = y(t)$.

Viele natürliche Prozesse lassen sich durch eine Gleichung beschreiben, in der neben der Funktion auch deren Ableitung vorkommt.

Beispiel 1:

1. Die Federschwingung:

Die Beschleunigung ist proportional zur Auslenkung und wirkt der Auslenkung entgegen: $y'' = -\lambda y$.

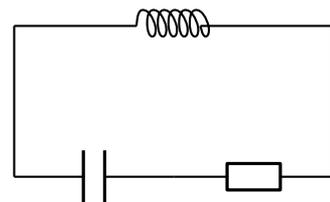
2. Das Wachstum einer Population:

Ohne Ressourcenbegrenzung ist die Vermehrung proportional zur gegenwärtigen Anzahl $y' = \lambda y$; die Lösung ist dann $c \cdot e^{\lambda x}$.

3. Ein elektrischer Schwingkreis mit Kondensator, Widerstand und Spule:

Für die Spannung u_C am Kondensator gilt

$$LC \cdot u_c'' + RC \cdot u_c' + u_c = 0.$$



Definition 2.1

Eine Gleichung, in der neben der unabhängigen Variablen x und einer gesuchten Funktion $y(x)$ auch Ableitungen von y bis zur Ordnung n auftreten, heißt *gewöhnliche Differenzialgleichung (DGL) n -ter Ordnung*.

Eine *Anfangsbedingung (AB)* dazu besteht in der Vorgabe von Werten

$$y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0).$$

Eine DGL mit Anfangsbedingungen heißt *Anfangswertproblem (AWP)*.

Bemerkungen:

1. Manchmal gibt es auch Bedingungen an zwei Stellen, z.B. $y(x_1) = a$ und $y(x_2) = b$ (*Randwertproblem*).
2. Es gibt keine allgemein gültigen Verfahren zur Lösung von Differenzialgleichungen. Für einige Typen von Differenzialgleichungen lassen sich aber Lösungsrezepte angeben (s. Anhang A).

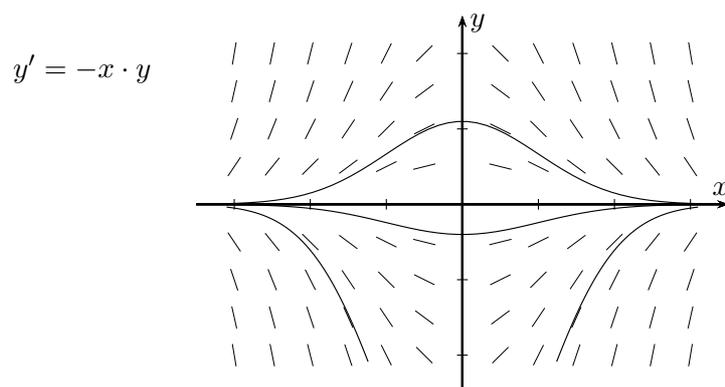
Literatur: [KSt] 12.1.1, 12.1.2; [Walz] 9.1, 9.2; [FF] 5.1; [Leu] 8.1; [SS] 10.2; [Pap2] V.1

2.1.2. Richtungsfeld und Euler-Verfahren

Wir betrachten hier eine gewöhnliche Differenzialgleichungen 1-ter Ordnung in der *expliziten Form* $y' = f(x, y)$, z.B. $y' = -x \cdot y$.

Durch $y' = f(x, y)$ wird in jedem Punkt (x, y) eine Steigung $f(x, y)$ vorgegeben. Dies kann man sich grafisch veranschaulichen (*Richtungsfeld*), um einen qualitativen Überblick über den Lösungsverlauf zu erhalten.

Beispiel 1:



Numerisch kann man eine solche Differenzialgleichung der Form $y' = f(x, y)$ lösen, indem man ausgehend von einem Anfangspunkt (x_0, y_0) „entlang der Richtungselemente“ weitergeht, d.h., bei der linearen Approximation die Differenzialgleichung einsetzt:

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + h \cdot y'(x) \\ &= y(x) + h \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Ausgehend von einer Anfangsbedingung, also einem gegebenen x_0 mit $y(x_0)$, kann man so iterativ die Funktion y an den Stellen $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ... berechnen (*Euler-Verfahren*):

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \approx y(x_0) + h \cdot f(x_0, y_0), \\ y(x_2) &= y(x_1 + h) \approx y(x_1) + h \cdot f(x_1, y(x_1)), \\ y(x_3) &= y(x_2 + h) \approx y(x_2) + h \cdot f(x_2, y(x_2)), \\ &\dots \end{aligned}$$

Man nennt h die *Schrittweite* des Verfahrens.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} y' &= -x \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2: \\ y(0.2) &\approx y(0) + 0.2 \cdot (-0 \cdot 1) = 1, \\ y(0.4) &\approx y(0.2) + 0.2 \cdot (-0.2 \cdot y(0.2)) \approx 1 + 0.2 \cdot (-0.2 \cdot 1) = 0.96, \\ y(0.6) &\approx y(0.4) + 0.2 \cdot (-0.4 \cdot y(0.4)) \approx 0.96 + 0.2 \cdot (-0.4 \cdot 0.96) = 0.8832, \\ &\dots \end{aligned}$$

Bemerkung (Heun-Verfahren):

Man kann das Euler-Verfahren verbessern, indem man ausgehend von x_0 und $y(x_0)$ zunächst “testweise“ einen Schritt wie oben geht und eine erste Approximation y_1 für $y(x_1)$ erhält und damit einen neuen Steigungswert $f(x_1, y_1)$. Mit der mittleren Steigung

$$y'_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y_1))$$

erhält man einen besseren Wert und setzt daher verbessert $y(x_1) = y(x_0) + h \cdot y'_{\text{mittel}}$.

Dieses Verfahren heißt *Heun-Verfahren*.

Beispiel 3:

$$y' = -x \cdot y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.2:$$

Die erste Approximation ist wie beim Euler-Verfahren (Beispiel 2):

$$y_1 \approx y(0) + 0.2 \cdot (-0 \cdot 1) = 1.$$

Dort hat man als Steigungswert

$$f(0.2, 1) = -0.2 \cdot 1 = -0.2$$

und erhält als mittlere Steigung

$$y'_{\text{mittel}} = \frac{1}{2}(f(0, 1) + f(0.2, 1)) = \frac{1}{2}(0 - 0.2) = -0.1$$

und damit eine bessere Approximation

$$y(0.2) = 1 + 0.2 \cdot (-0.1) = 0.98.$$

Ausgehend von $y(0.2) = 0.98$ kann man dann den nächsten Schritt machen.

Man kann dieses Verfahren weitertreiben und die Steigung an dem so berechneten Wert nehmen und damit erneut einen modifizierten Steigungswert berechnen, mit dem man von x_0 aus startet, u.s.w.. Damit erhält man eine ganze Klasse von Verfahren, die sogenannten *Runge-Kutta-Verfahren*.

Literatur: [KSt] 12.1.3, 12.6.1; [FF] 5.2.1, 5.6.1; [Leu] 8.2; [Brill] 14.5; [Hart] 17.4; [Pap2] V.2.1, V.6.1

2.2. Lineare Differenzialgleichungen

2.2.1. Lösungstheorie

Definition 2.2

Eine Differenzialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = f(x)$$

heißt *lineare Differenzialgleichung* (n -ter Ordnung).

Ist $f = 0$, so heißt sie *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Beispiel 1:

1. Die Differenzialgleichung

$$y'' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y'' + y = 0$$

ist eine lineare homogene Differenzialgleichung mit $a_1(x) = 0$ und $a_0(x) = 1$.

2. Die Differenzialgleichungen $y' = x \cdot y^2$ und $y' = e^y$ sind nicht linear.
3. Die Differenzialgleichung

$$y'' + x^2 y' - y = \sin x$$

ist linear und inhomogen mit $a_1(x) = x^2$, $a_0(x) = -1$ und $f(x) = \sin x$.

4. Die Gleichung für einen mit einer Spannung $u(t)$ angeregten Schwingkreis,

$$LC \cdot u_c''(t) + RC \cdot u_c'(t) + u_c(t) = u(t),$$

ist eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Im anregungsfreien Fall $u(t) = 0$ ist sie homogen, ansonsten inhomogen.

Lineare Differenzialgleichungen und deren Lösungstheorie haben eine große Ähnlichkeit zu linearen Gleichungssysteme:

Satz 2.3

1. Sind y_1, y_2, \dots, y_n Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung, so auch jede Linearkombination $y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$.
2. Jede Lösung zu einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung lässt sich darstellen als eine spezielle Lösung + eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung.

Bemerkung:

Satz 2.3,1., besagt anders ausgedrückt, dass die Lösungsmenge einer homogenen linearen Differenzialgleichung ein Vektorraum ist.

Beispiel 2:

Die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ hat die Lösungen $y_1(x) = \cos x$ und $y_2(x) = \sin x$. Damit sind auch $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ Lösungen, denn:

$$\begin{aligned} (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + (c_1 y_1 + c_2 y_2) &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 (y_1'' + y_1) + c_2 (y_2'' + y_2) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $y'' + y = x$ hat die spezielle Lösung $y(x) = x$. Damit sind dann alle Funktionen

$$y(x) = x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Lösungen von $y'' + y = x$.

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass es bei einer linearen homogenen Differentialgleichung n -ter Ordnung immer n „grundsätzlich verschiedene“ Lösungen y_1, \dots, y_n gibt, die dann eine Basis des Lösungsraums bilden, d.h. der Lösungsraum ist n -dimensional.

Eine solche Basis des Lösungsraums heißt *Fundamentalsystem*.

Hat man zu einer entsprechenden inhomogenen Differentialgleichung eine spezielle Lösung y_s gefunden, so bezeichnet man

$$y = y_s + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad (c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R})$$

als *allgemeine Lösung*.

Damit kann man jede Anfangsbedingung durch eine geeignete Linearkombination erfüllen.

Beispiel 3 (vgl. Beispiel 2):

Zur Differentialgleichung $y'' + y = 0$ ist $\{\sin x, \cos x\}$ ein Fundamentalsystem.

Eine allgemeine Lösung zur Differentialgleichung $y'' + y = x$ ist

$$y(x) = x + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Hat man beispielsweise noch die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ gegeben, so erhält man bei Einsetzen der allgemeinen Lösung

$$1 \stackrel{!}{=} y(0) = c_2 \quad \text{und} \quad 3 \stackrel{!}{=} y'(0) = 1 + c_1,$$

also $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. Damit erfüllt

$$y(x) = x + 2 \sin x + \cos x$$

die Anfangsbedingungen.

Literatur: [KSt] 12.3.1, 12.3.3; [Walz] 9.4.1; [Stingl] 10.3; [Leu] 8.3.2.1; [Hart] 17.3; [SS] 10.4; [Pap2] V.3.2, V.3.4

2.2.2. Lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Betrachtet wird die Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

mit (konstanten) Koeffizienten a_i .

Beispiel 1 (Gleichung zu einem Schwingkreis (vgl. Seite 8)):

$$\begin{aligned} LC \cdot u_c''(t) + RC \cdot u_c'(t) + u_c(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow u_c''(t) + \frac{R}{L} \cdot u_c'(t) + \frac{1}{CL} u_c(t) &= 0. \end{aligned}$$

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt mit

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, \quad y^{(k)}(x) = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$

durch Einsetzen zu

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y \\ &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \cdot \lambda e^{\lambda x} + a_0 \cdot e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x} (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Dies ist erfüllt, falls λ Nullstelle des Polynoms $\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ ist.

Definition 2.4

Zur Differenzialgleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ heißt

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

charakteristisches Polynom.

Der obige Ansatz zeigt: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist $e^{\lambda x}$ Lösung der Differenzialgleichung.

Beispiel 2:

Das charakteristische Polynom zu $y'' - 4y = 0$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 4$ und hat die Nullstellen ± 2 .

Also sind $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^{-2x}$ Lösungen der Differenzialgleichung.

Was ist bei $y'' + y = 0$ also $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ mit (komplexer) Nullstelle $\pm j$?

Man kann versuchen, e^{jx} als Lösung zu nehmen. Es ist $e^{jx} = \cos x + j \sin x$. Tatsächlich sind $\cos x$ und $\sin x$, also Real- und Imaginärteil von e^{jx} , Lösungen von $y'' + y = 0$.

Dieses Rezept gilt allgemein: Ist $\lambda = \alpha + j\beta$ Nullstelle von p , so ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(e^{\lambda x}) &= \operatorname{Re}(e^{(\alpha+j\beta)x}) = \operatorname{Re}(e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x}) \\ &= e^{\alpha x} \cdot \operatorname{Re}(\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)\end{aligned}$$

eine Lösung der Differenzialgleichung, entsprechend auch $\operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$.

Satz 2.5

Sei $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom zu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (*)$$

1. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Nullstelle von p , so ist $y(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung von $(*)$.
2. Ist $\lambda = \alpha + j\beta$ Nullstelle von p , so sind

$$y_1(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

Lösungen von $(*)$.

Bemerkungen:

1. Die Nullstellen des charakteristischen Problems werden auch *Eigenwerte* der Differenzialgleichung genannt.
2. Ist $\lambda = \alpha + j\beta$ Nullstelle von p , so auch $\lambda^* = \alpha - j\beta$. Dies führt zu Lösungen

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda^* x}) = e^{\alpha x} \cdot \cos(-\beta x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) = y_1(x)$$

und

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda^* x}) = e^{\alpha x} \cdot \sin(-\beta x) = -e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) = -y_2(x)$$

und damit zu keinen grundsätzlich neuen Lösungen, da nach Satz 2.3 mit y_2 auch $-y_2$ Lösung ist.

3. Man kann zeigen, dass es bei einer k -fachen Nullstelle λ von p auch Lösungen der Form $x \cdot e^{\lambda x}$, $x^2 \cdot e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$ gibt (bei komplexem λ jeweils mit Real- und Imaginärteil).

Beispiel 3:

Die Differenzialgleichung $y'' + 2y' + y = 0$ besitzt als charakteristisches Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = -1$.

Man erhält also neben der Lösung e^{-x} auch die Lösung $x e^{-x}$.

4. Die derartigen Funktionen bilden ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung.

Literatur: [KSt] 12.3.4; [Walz] 9.4.2; [Stingl] 10.4; [Hart] 17.3; [SS] 10.5; [Pap2] V.3.3, V.5.2

2.2.3. Die Schwingungsgleichung

Ziel: Analyse der Lösungen zur Schwingungsgleichung

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

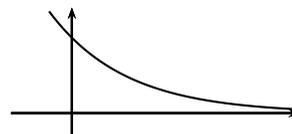
Es gibt verschiedene Fälle:

1. Fall: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 > b$ (aperiodischer Fall).

Dann sind $\lambda_{1,2}$ reell und die Lösungen Exponentialfunktionen. In dem üblichen Fall $a, b > 0$ ist $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, d.h., die Lösungen sind fallend, und in der allgemeinen Lösung

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

ist der erste Summand dominant.

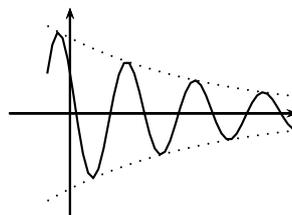


2. Fall: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < b$ (periodischer Fall).

Dann sind $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ mit $\sigma = \frac{a}{2}$ und $\omega = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ komplex.

Die allgemeine Lösung ist dann

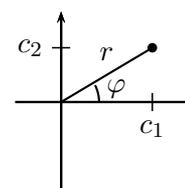
$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{-\sigma x} \cos(\omega x) + c_2 e^{-\sigma x} \sin(\omega x) \\ &= e^{-\sigma x} \cdot (c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)) \\ &= e^{-\sigma x} \cdot r \cdot \cos(\omega x - \varphi). \end{aligned}$$



Die letzte Umformung ergibt sich mit dem Additionstheorem:

$$r \cdot \cos(\omega x - \varphi) = r \cos \varphi \cos(\omega x) + r \sin \varphi \sin(\omega x),$$

d.h., man muss r und φ so wählen, dass $r \cos \varphi = c_1$ und $r \sin \varphi = c_2$ ist.



Für $a > 0$ sind dies gedämpfte Schwingungen.

3. Fall: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$ (aperiodischer Grenzfall).

Dann besitzt das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle in $-\sigma$ mit $\sigma = \frac{a}{2}$ und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 e^{-\sigma x} + c_2 x e^{-\sigma x}.$$

Bei $a, b > 0$ erhält man also immer abklingende Lösungen mit einem Faktor $e^{-\sigma x}$ und

$$\sigma = \begin{cases} \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, & \text{falls } \left(\frac{a}{2}\right)^2 > b, \\ \frac{a}{2}, & \text{falls } \left(\frac{a}{2}\right)^2 \leq b. \end{cases}$$

Man kann sich überlegen, dass bei festem b der Wert von σ am größten wird (die Lösung also am schnellsten abklingt), wenn a so gewählt wird, dass $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b$ ist, also beim aperiodischen Grenzfall.

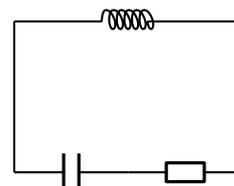
Beispiel 1:

Die Spannung an dem Kondensator in einem Schwingkreis mit Kapazität C , Induktivität L und Widerstand R wird durch die Differenzialgleichung

$$u_c''(t) + \frac{R}{L} \cdot u_c'(t) + \frac{1}{CL} u_c(t) = 0$$

beschrieben, also $a = \frac{R}{L}$ und $b = \frac{1}{CL}$, d.h.,

$$\text{bei } \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{CL} \text{ erhält man den } \begin{cases} \text{aperiodischen Fall,} \\ \text{aperiodischen Grenzfall,} \\ \text{periodischen Fall.} \end{cases}$$



Der Ansatz $y(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ führt auch bei Schwingungsgleichungen mit einer sinus- oder cosinusförmigen Erregung zum Erfolg.

Beispiel 2:

Betrachtet wird die inhomogene Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + y' + 2y = \cos(t).$$

Idee: Wegen $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{jt})$ kann man die Differenzialgleichung

$$y'' + y' + 2y = e^{jt}$$

betrachten und von der Lösung nur den Realteil benutzen.

Die Anschauung legt nahe, dass die Lösung y entsprechend periodisch ist, ggf. mit einer Phasenverschiebung φ , also $y = \hat{y} \cdot \cos(t + \varphi)$ mit Amplitude \hat{y} oder komplexifiziert

$$y = \hat{y} \cdot e^{j(t+\varphi)} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{jt}.$$

Fasst man $\hat{y} \cdot e^{j\varphi}$ als eine (komplexe) Zahl c auf, führt dies zu dem Ansatz $y(t) = c \cdot e^{jt}$. Damit ist

$$y'(t) = c \cdot j \cdot e^{jt} \quad \text{und} \quad y''(t) = -c \cdot e^{jt}$$

und Einsetzen führt zu

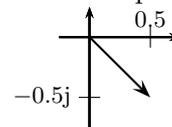
$$\begin{aligned} -c \cdot e^{jt} + c \cdot j \cdot e^{jt} + 2 \cdot c \cdot e^{jt} &= e^{jt} \\ \Leftrightarrow -c + c \cdot j + 2 \cdot c &= 1 \\ \Leftrightarrow c \cdot (-1 + j + 2) &= 1 \\ \Leftrightarrow c = \frac{1}{1+j} &= \frac{1-j}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich so

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \right) \cdot e^{jt} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j \right) \cdot (\cos t + j \sin t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t. \end{aligned}$$

Wegen $c = \hat{y} \cdot e^{j\varphi}$ erhält man aus der Polardarstellung von c direkt die Amplitude \hat{y} und die Phasenverschiebung φ . Hier ist

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}j},$$



so dass sich die Lösung auch darstellen lässt als

$$y(t) = \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}j} \cdot e^{jt} \right) = \operatorname{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} e^{j(-\frac{\pi}{4}+t)} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right).$$

Dieses Verfahren kann man allgemein nutzen bei einer Differenzialgleichung der Form

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \hat{a} \cos(\omega_0 t)$$

(erzwungene Schwingung mit der Frequenz ω_0):

Der Ansatz $y(t) = c \cdot e^{j\omega_0 t}$ in

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = \hat{a} e^{j\omega_0 t}$$

führt zu einem (komplexen) c und damit zu einer Lösung $y(t) = \operatorname{Re}(c \cdot e^{j\omega_0 t})$.

Besitzt c die Polardarstellung $c = r \cdot e^{j\varphi}$, so ist

$$y(t) = \operatorname{Re}(r \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 t}) = \operatorname{Re}(r \cdot e^{j(\omega_0 t + \varphi)}) = r \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Die Lösung ist also eine phasenverschobene Schwingung mit $r = |c|$ als Amplitude.

Bemerkungen:

1. Die allgemeine Lösung erhält man nach Satz 2.3 als Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Da die Lösungen der homogenen Gleichung abklingen (s.o.), ergibt sich die errechnete spezielle Lösung in jedem Fall für große t .
2. Steht in der Differenzialgleichung „sin“ statt „cos“, so führt man das Verfahren wie beschrieben mit dem Imaginärteil statt des Realteils durch.

Literatur: [KSt] 12.4; [Walz] 9.4.2, 9.4.3; [Leu] 8.3.2.2; [SS] 10.7.2; [Pap2] V.3.3

2.3. Ausblick

2.3.1. Differenzialgleichungssysteme

Statt nur *eine* Funktion y zu betrachten, kommt es in der Praxis häufig vor, dass mehrere Funktionen und ihre Ableitungen zusammenhängen.

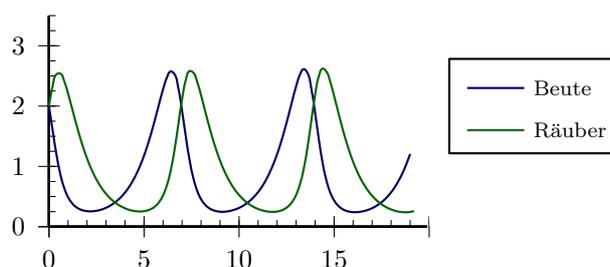
Beispiel 1 (Räuber-Beute-Modell):

Sei $u(t)$ die Populationsgröße einer Beute zur Zeit t und $v(t)$ die für den entsprechenden Räuber. Dann ist ein Fortpflanzungsmodell gegeben durch

$$u' = u(1 - v) \quad (\text{Die Beute vermehrt sich entsprechend ihrer Population und mehr bzw. weniger schnell bei kleiner bzw. großer Räuberpopulation.})$$

$$v' = v(u - 1) \quad (\text{Der Räuber vermehrt sich entsprechend seiner Population und mehr bzw. weniger schnell bei größerer bzw. kleinerer Beutepopulation.})$$

Die Lösung kann man numerisch approximieren:



Explizite Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung, also

$$y_1' = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$

$$y_2' = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x)$$

kann man numerisch mit dem Euler-Verfahren lösen (vgl. Seite 9).

Beispiel 2:

Betrachtet wird das System mit zwei Funktionen y_0 und y_1 :

$$y_0' = y_1$$

$$y_1' = x - x^2 \cdot y_1 \cdot y_0.$$

mit den Anfangsbedingungen $y_0(1) = 2$ und $y_1(1) = -1$.

Bei einer Schrittweite $h = 0.1$ ergibt sich entsprechend des Euler-Verfahrens:

$$\begin{aligned} y_0(1.1) &\approx y_0(1) + 0.1 \cdot y'_0(1) \\ &= y_0(1) + 0.1 \cdot y_1(1) \\ &= 2 + 0.1 \cdot (-1) = 1.9, \\ y_1(1.1) &\approx y_1(1) + 0.1 \cdot y'_1(1) \\ &= y_1(1) + 0.1 \cdot (1 - 1^2 \cdot y_1(1) \cdot y_0(1)) \\ &= -1 + 0.1 \cdot (1 - 1^2 \cdot (-1) \cdot 2) = -0.7. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann man nun $y_0(1.2)$ und $y_1(1.2)$ berechnen, u.s.w..

Eine Differenzialgleichung höherer Ordnung kann in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden: Bei einer expliziten Darstellung

$$y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)}, x)$$

führt dies mit $y_0 = y$, $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, \dots , $y_{n-1} = y^{(n-1)}$ zu dem expliziten System:

$$\begin{aligned} y'_0 &= (y)' &= y' &= y_1 \\ y'_1 &= (y')' &= y'' &= y_2 \\ &\vdots && \\ y'_{n-2} &= (y^{(n-2)})' &= y^{(n-1)} &= y_{n-1} \\ y'_{n-1} &= (y^{(n-1)})' &= y^{(n)} \\ &= f(y, y', \dots, y^{(n-1)}, x) &= f(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Dieses kann dann, wie oben erwähnt, numerisch gelöst werden.

Beispiel 3:

Die Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = x - x^2 \cdot y' \cdot y$$

wird mit $y_0 = y$ und $y_1 = y'$ wegen

$$y'_0 = y' \quad \text{und} \quad y'_1 = (y')' = y'' = x - x^2 \cdot y' \cdot y$$

überführt in das System

$$\begin{aligned} y'_0 &= y_1 \\ y'_1 &= x - x^2 \cdot y_1 \cdot y_0. \end{aligned}$$

Hat man nun beispielsweise die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ und $y'(1) = -1$, so bedeutet dies $y_0(1) = 2$ und $y_1(1) = -1$ und man kann das System wie oben lösen (vgl. Beispiel 2). Die Werte für y_0 entsprechen dann der Lösung y .

Literatur: [KSt] 12.5, 12.6.2; [Leu] 8.4

2.3.2. Partielle Differenzialgleichungen

Statt Funktionen von nur *einer* Variablen zu betrachten, kann man eine Funktion von mehreren Variablen und ihre partiellen Ableitungen in Beziehung setzen.

Beispiel 1 (Potenzialgleichung):

Bei einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ kann man die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0$$

betrachten. (Man bezeichnet allgemein

$$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$$

auch als *Laplace-Operator*).

Elektrische Potenziale erfüllen diese Differenzialgleichung in den Bereichen des Raums, in denen keine Ladung vorhanden ist,.

Als Anfangswerte gibt man z.B. die Werte von f auf einer Kugeloberfläche an.

Eine Lösung ist

$$f(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{mit einer Konstanten } c$$

(in Kugelkoordinaten $f(r) = \frac{c}{r}$; dies entspricht dem elektrischen Potenzial, das durch eine geladene Kugel erzeugt wird).

Beispiel 2 (Wellengleichung):

Eine schwingende Saite mit Auslenkung $u(x, t)$ erfüllt die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = c \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

mit einer Materialkonstanten $c > 0$. Als Randbedingungen gibt es eine Anfangslage $u_0(x) = u(x, 0)$ und Einspannpunkte, z.B. $0 = u(0, t) = u(\pi, t)$.

3. Fourier- und Laplace-Transformation

3.1. Die Fourierreihe

Ziel:

Darstellung einer Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$f(x) = c + \sum_m b_m \sin(mx) + \sum_m a_m \cos(mx).$$

Trick:

Es gilt für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq n, \\ \pi, & \text{falls } m = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq n, \\ \pi, & \text{falls } m = n. \end{cases}$$

Multiplikation von

$$f(x) = c + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$

mit $\cos(nx)$, $n > 0$, und Integration von 0 bis 2π liefert:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(c \cdot \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) \cos(nx) + b_m \sin(mx) \cos(nx)) \right) dx \\ \text{„=“} & \int_0^{2\pi} c \cdot \cos(nx) \, dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx + b_m \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \quad 0 \qquad \qquad \qquad + a_n \cdot \pi \qquad \qquad \qquad + 0 \\ &= a_n \cdot \pi. \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich $\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx = b_n \cdot \pi$.

Ferner ist $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) \, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = 2\pi \cdot c$.

Definition 3.1

Zu einer integrierbaren Funktion $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ heißen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx \quad (n > 0).$$

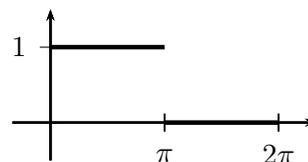
die *Fourierkoeffizienten*. Ferner heißt

$$\frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Fourierreihe zu f .

Beispiel 1:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$



Es ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$$

und für $n > 0$ wegen der Symmetrien des Cosinus

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) \, dx = 0$$

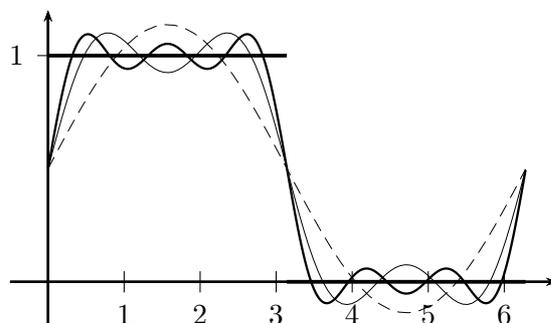
und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \cdot \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \cdot \sin(5x) + \dots$$

die Fourierreihe zu f .



Hoffnung: Die Fourierreihe stellt die ursprüngliche Funktion dar:

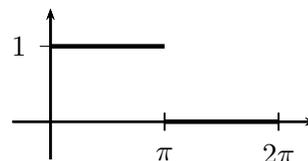
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \cdot \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \cdot \sin(5x) + \dots$$

Satz 3.2

Ist $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ bis auf endlich viele Punkte in $[0, 2\pi]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so stimmt die Fourierreihe zu f in jedem Stetigkeitspunkt von f mit f überein.

Beispiel 2 (Fortsetzung von Beispiel 1):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$



In $]0, \pi[$ und $]\pi, 2\pi[$ konvergiert die Fourierreihe gegen f (vgl. auch das Bild oben). In $x = \pi$ hat f einen Sprung von 1 auf 0. Die Fourierreihe hat dort den Wert $\frac{1}{2}$. Dies gilt auch allgemein:

Bemerkungen:

1. Ist f „brav“, so konvergiert die Fourierreihe an Sprungstellen von f gegen den entsprechenden Mittelwert.
2. Die Fourierreihe ist 2π -periodisch, d.h., sie stellt (bei „bravem“ f) die 2π -periodisch fortgesetzte Funktion f dar.

Eine andere, in vielen Fällen handlichere Form der Fourierreihe erhält man in der komplexen Form:

Definition 3.3

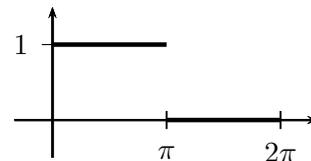
Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und für $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx.$$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jnx}$ heißt (komplexe Form der) *Fourierreihe* zu f .

Beispiel 3 (vgl. Beispiel 1):

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$



Für $n \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jnx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-jnx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-jn} e^{-jnx} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-jn} \cdot (e^{-jn\pi} - e^{-jn \cdot 0}) \\ &= \frac{j}{2\pi n} \cdot (\cos(n\pi) - j \sin(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{j}{n\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{und } c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-j0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot 1 dx = \frac{1}{2}.$$

Damit lautet die Fourierreihe

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \text{ ungerade}} -\frac{j}{n\pi} e^{jnx}.$$

Eine Zusammenfassung der Summanden zu n und $-n$ ergibt

$$\begin{aligned} & -\frac{j}{n\pi} e^{jnx} + \left(-\frac{j}{-n\pi} e^{-jnx} \right) \\ &= -\frac{j}{n\pi} (\cos(nx) + j \sin(nx)) + \frac{j}{n\pi} (\cos(nx) - j \sin(nx)) \\ &= -2 \cdot \frac{j}{n\pi} \cdot j \sin(nx) = \frac{2}{n\pi} \sin(nx). \end{aligned}$$

Die Fourierreihe ist also nur eine andere Darstellung für die reelle Fourierreihe aus Beispiel 1.

Bemerkungen:

1. Statt der Definition im Intervall $[0, 2\pi]$ kann man analog auch das Intervall $[-\pi, \pi]$ zugrunde legen.
2. Man kann sich überlegen, dass (bei reellem f) für $n > 0$ gilt:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad \text{und} \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).$$

In Polarkoordinaten $c_n = r_n \cdot e^{j\varphi_n}$ gibt r_n Auskunft über die Amplitude und φ_n über die Phasenverschiebung der n -ten Schwingung.

3. Bei periodischen Funktionen mit einer anderen Periode als 2π muss man entsprechend skalieren. Hat man beispielsweise eine T -periodische Funktion f , so setzt man

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \cos(n\frac{2\pi}{T}x) dx \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \sin(n\frac{2\pi}{T}x) dx \quad (n > 0)$$

und erhält als Fourierreihe

$$\frac{1}{2} \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}x) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}x)),$$

bzw. in der komplexen Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nx} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-j\frac{2\pi}{T}nx} dx.$$

Literatur: [KSt] 13; [Walz] 8.4; [Sting] 9.3; [FF] 2.3; [Leu] 7.3; [Hart] 16.3; [Pap2] II.1

3.2. Die Fourier-Transformation

3.2.1. Definition

Auch (nichtperiodische) Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind, kann man in Schwingungen zerlegen:

Definition 3.4

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\rightarrow \mathbb{C}$) stückweise stetig. Dann heißt

$$F = \mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

die *Fourier-Transformierte* zu f (falls existent).

Satz 3.5

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ „brav“ und F die Fourier-Transformierte zu f , so gilt

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

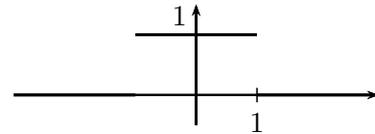
Bemerkungen:

1. Die Definition entspricht dem Grenzfall einer „unendlichen“ Periode. Statt diskreter Fourierkoeffizienten c_n erhält man für jedes ω einen Wert $F(\omega)$. Die Darstellung der Funktion als Fourierreihe, d.h. als (diskrete) Summe, verwandelt sich dabei in das (kontinuierliche) Fourierintegral aus Satz 3.5.
2. Gegenüber der Fourierreihe auf $[0, 2\pi]$ verschiebt sich die sogenannte Normierung, d.h. der Faktor $\frac{1}{2\pi}$, weg von der Definition der Transformaten hin zur Formel bei der Rücktransformation.
Manchmal wird der Faktor allerdings auch bei der Definition und nicht bei der Rücktransformation gesetzt. Eine andere Variante ist die Definition und die Rücktransformation jeweils mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
3. Manchmal nutzt man statt der *Kreisfrequenz* ω die *Frequenz* ν , wobei $\omega = 2\pi\nu$ gilt. Damit ergibt sich die Hin- und Rück-Transformation durch

$$\nu \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi\nu t} dt \quad \text{und} \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \cdot e^{j2\pi\nu t} d\nu.$$

Beispiel 1:

$$\text{Zu } f(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \text{ ist}$$

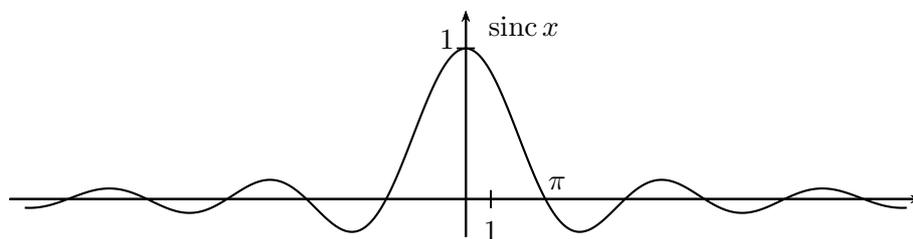


$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{-j\omega} [e^{-j\omega} - e^{j\omega}] \\ &= \frac{1}{-j\omega} [\cos(-\omega) + j \sin(-\omega) - (\cos(\omega) + j \sin(\omega))] \\ &= \frac{1}{-j\omega} (-2j \sin(\omega)) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \omega. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Wegen ihrer Bedeutung in der Nachrichtentechnik hat die Funktion $\frac{\sin \omega}{\omega}$ einen eigenen Namen:

$$\text{sinc } x := \text{si } x := \frac{\sin x}{x} \quad (\text{sinus cardinalis}).$$

**Schreibweise:**

Die Zuordnung zwischen einer Funktion f und ihrer Fourier-Transformierten F beschreibt man auch durch $f \circ \bullet F$.

Literatur: [KSt] 15.1, 15.3; [FF] 2.4

3.2.2. Eigenschaften der Fourier-Transformation

Wie transformieren sich Zusammenhänge zwischen Funktionen bei der Transformation?

Satz 3.6

Seien $f \circ \bullet F$, $f_i \circ \bullet F_i$ und $g \circ \bullet G$ Fourier-Korrespondenzen.

1. $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$
(Superpositions-/Überlagerungssatz)
2. $g(t) = f(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega)$
(Verschiebungssatz)
3. $g(t) = f\left(\frac{t}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = |c| \cdot F(c \cdot \omega)$
 $g(t) = f(c \cdot t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = \frac{1}{|c|} \cdot F\left(\frac{1}{c} \cdot \omega\right)$
(Ähnlichkeitssatz)
4. $g(t) = f'(t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = j\omega \cdot F(\omega)$
allg.: $g(t) = f^{(n)}(t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = (j\omega)^n \cdot F(\omega)$
5. $g(t) = t \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = j \cdot F'(\omega)$
allg.: $g(t) = t^n \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = j^n \cdot F^{(n)}(\omega)$
6. $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

Bemerkung:

Die Funktion

$$g(t) = f_1 * f_2 := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

heißt *Faltung* zu f_1 und f_2 . (Zu Details s. Anhang, Abschnitt B.3.)

Herleitungen:

$$\begin{aligned} \text{Zu 1. } G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_1 \cdot f_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} c_2 \cdot f_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= c_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt + c_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= c_1 \cdot F_1(\omega) + c_2 \cdot F_2(\omega). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zu 2. } G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt \stackrel{t-t_0=s}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot e^{-j\omega(s+t_0)} ds \\
&= e^{-j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot e^{-j\omega s} ds \\
&= e^{-j\omega t_0} \cdot F(\omega).
\end{aligned}$$

Zu 5. Bei „braven“ Funktionen darf man unter dem Integral differenzieren:

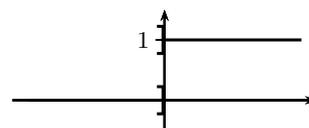
$$\frac{\partial}{\partial \omega} \int H(t, \omega) dt = \int \frac{\partial}{\partial \omega} H(t, \omega) dt.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
j \cdot F'(\omega) &= j \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} (f(t) \cdot e^{-j\omega t}) dt \\
&= j \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (-jt) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot t \cdot e^{-j\omega t} dt.
\end{aligned}$$

Leider kann man nicht zu allen Funktionen die Fourier-Transformierte bilden. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz ist, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ endlich ist. Allerdings erfüllen viele Standardfunktionen diese Bedingung nicht, z.B. $f = \text{const}$ oder die sogenannte *Heaviside-Funktion* (auch *Sprungfunktion* genannt)

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0. \end{cases}$$



Die Fourier-Transformierte existiert hier nicht im gewöhnlichen Sinn. Es gibt aber eine verallgemeinerte Interpretation, vgl. Abschnitt B.4 auf Seite 83.

Literatur: [KSt] 15.2, 15.4; [FF] 2.4

3.3. Diskrete Fourier-Transformation

Kann man auch eine Fourier-Transformation durchführen, wenn nur Informationen an diskreten Punkten vorliegen, z.B. Bildpunkte eines digitalen Bildes? Statt der Integraldefinition der Koeffizienten kann man wie bei der numerischen Integration Zwischensummen betrachten:

Definition 3.7

Seien N Datenpunkte f_k , $k = 0, \dots, N - 1$ gegeben.

Mit $x_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$, $k = 0, \dots, N - 1$ heißen

$$a_n = \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos(n \cdot x_k) \quad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \sin(n \cdot x_k) \quad (n > 0)$$

Koeffizienten zur *diskreten Fourier-Transformation* zu den f_k .

Bemerkungen:

1. Fasst man die Datenpunkte als Funktionswerte auf, $f_k = f(x_k)$, so stellen die Ausdrücke genau die Riemannschen Zwischensummen der Integrale aus Definition 3.1 dar.
2. Statt $n \cdot x_k$ mit $x_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$ könnte man auch direkt $\frac{2\pi kn}{N}$ schreiben.

Beispiel 1:

Gegeben seien die $N = 4$ Datenpunkte

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad f_3 = -1.$$

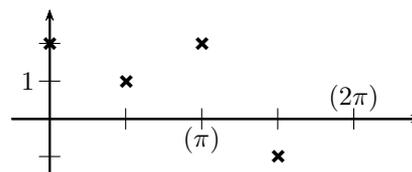
Dann ist

$$x_0 = \frac{2\pi \cdot 0}{4} = 0, \quad x_1 = \frac{2\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi, \quad x_3 = \frac{2\pi \cdot 3}{4} = \frac{3}{2}\pi,$$

also

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{4} \cdot (f_0 \cdot \cos(0 \cdot x_0) + f_1 \cdot \cos(0 \cdot x_1) + f_2 \cdot \cos(0 \cdot x_2) + f_3 \cdot \cos(0 \cdot x_3)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{4} \cdot (f_0 \cdot \cos(1 \cdot x_0) + f_1 \cdot \cos(1 \cdot x_1) + f_2 \cdot \cos(1 \cdot x_2) + f_3 \cdot \cos(1 \cdot x_3)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \cos(\pi) + (-1) \cdot \cos(\frac{3}{2}\pi)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{2}{4} \cdot (f_0 \cdot \cos(2 \cdot x_0) + f_1 \cdot \cos(2 \cdot x_1) + f_2 \cdot \cos(2 \cdot x_2) + f_3 \cdot \cos(2 \cdot x_3)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \cos(\pi) + 2 \cdot \cos(2\pi) + (-1) \cdot \cos(3\pi)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) \\
&= 2
\end{aligned}$$

und z.B.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{4} \cdot (f_0 \cdot \sin(1 \cdot x_0) + f_1 \cdot \sin(1 \cdot x_1) + f_2 \cdot \sin(1 \cdot x_2) + f_3 \cdot \sin(1 \cdot x_3)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sin(0) + 1 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \sin(\pi) + (-1) \cdot \sin(\frac{3}{2}\pi)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Da man nur N Werte vorgibt, sind auch nur N Koeffizienten relevant. Zum Beispiel gilt

$$(n + N) \cdot x_k = (n + N) \cdot \frac{2\pi k}{N} = n \cdot \frac{2\pi k}{N} + 2\pi \cdot k = n \cdot x_k + 2\pi k$$

und daher

$$\cos((n + N) \cdot x_k) = \cos(n \cdot x_k + 2\pi k) = \cos(n \cdot x_k),$$

also $a_{n+N} = a_n$, entsprechend $b_{n+N} = b_n$.

Man kann entsprechend nachrechnen, dass gilt: $a_{N-n} = a_n$ und $b_{N-n} = -b_n$.

Mit den Koeffizienten zur diskreten Fourier-Transformation kann man die ursprünglichen Werte zurückgewinnen:

Satz 3.8

Seien $x_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$, $k = 0, \dots, N - 1$ und a_n, b_n die Koeffizienten der diskreten Fourier-Transformation zu Datenpunkten f_k , $k = 0, \dots, N - 1$. Dann gilt

für gerades N :

$$f_k = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} (a_n \cdot \cos(n \cdot x_k) + b_n \cdot \sin(n \cdot x_k)) + \frac{1}{2} \cdot a_{\frac{N}{2}} \cdot \cos\left(\frac{N}{2}x_k\right),$$

für ungerades N :

$$f_k = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} (a_n \cdot \cos(n \cdot x_k) + b_n \cdot \sin(n \cdot x_k)).$$

Bemerkung:

An den Formeln erkennt man, welche N Fourierkoeffizienten für die Rücktransformation relevant sind: a_0 , a_k und b_k mit k von 1 bis $< \frac{N}{2}$ und, falls N gerade ist, $a_{\frac{N}{2}}$.

Beispiel 2 (Fortsetzung von Beispiel 1):

Wegen $N = 4$ ist

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cdot \cos(1 \cdot x_k) + b_1 \cdot \sin(1 \cdot x_k) + \frac{1}{2}a_2 \cdot \cos(2 \cdot x_k) \\ &= 1 + 0 \cdot \cos(x_k) + 1 \cdot \sin(x_k) + 1 \cdot \cos(2 \cdot x_k), \end{aligned}$$

im speziellen

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 + 0 \cdot \cos(0) + 1 \cdot \sin(0) + 1 \cdot \cos(2 \cdot 0) \\ &= 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2, \\ f_1 &= 1 + 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \\ &= 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1, \\ f_2 &= 1 + 0 \cdot \cos(\pi) + 1 \cdot \sin(\pi) + 1 \cdot \cos(2 \cdot \pi), \\ &= 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2, \\ f_3 &= 1 + 0 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 1 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{3}{2}\pi\right), \\ &= 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

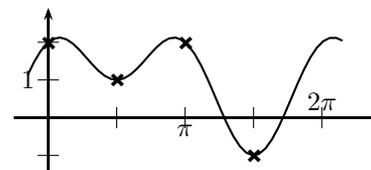
Bemerkung:

Ersetzt man in den Ausdrücken in Satz 3.8 x_k durch x , so erhält man Funktionen, die die Datenpunkte interpolieren.

Beispiel 3 (Fortsetzung von Beispiel 1 und 2):

Hier ist

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 0 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x) + 1 \cdot \cos(2x) \\ &= 1 + \sin(x) + \cos(2x). \end{aligned}$$



Wie bei der Fourierreihe gibt es auch eine komplexe Form der diskreten Fourier-Transformation.

Definition 3.9

Zu gegebenen f_k bildet man die *komplexen Fourierkoeffizienten*

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (n \geq 0).$$

Die ursprünglichen Werte ergeben sich dann durch die inverse Transformation

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot e^{j \frac{2\pi kn}{N}}.$$

(Statt des Faktors $\frac{1}{\sqrt{N}}$ bei Hin- und Rücktransformation kann man auch einen Faktor $\frac{1}{N}$ nur bei der Hintransformation oder nur bei der inversen Transformation nutzen.)

Bemerkung:

Offensichtlich sind bei der Rücktransformation nur die Koeffizienten c_n für $n = 0, \dots, N-1$ relevant. Tatsächlich kann man nachrechnen, dass $c_{n+N} = c_n$ gilt.

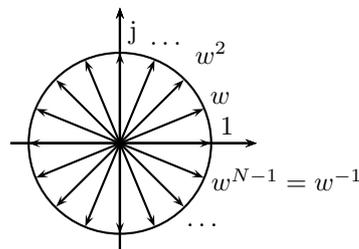
Sind alle f_k reell, so gilt ferner $c_{N-n} = c_n^*$.

Bemerkung:

Man kann die Transformationen auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben:

Mit $w = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ (w erfüllt also $w^N = 1$) ist

$$e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right)^{-kn} = w^{-kn},$$



und man kann die Transformation schreiben als

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} w^{-0\cdot 0} & w^{-1\cdot 0} & \dots & w^{-(N-1)\cdot 0} \\ w^{-0\cdot 1} & w^{-1\cdot 1} & \dots & w^{-(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{-0\cdot (N-1)} & w^{-1\cdot (N-1)} & \dots & w^{-(N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix}}_{=: C} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} w^{0\cdot 0} & w^{1\cdot 0} & \dots & w^{(N-1)\cdot 0} \\ w^{0\cdot 1} & w^{1\cdot 1} & \dots & w^{(N-1)\cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{0\cdot (N-1)} & w^{1\cdot (N-1)} & \dots & w^{(N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix}}_{=: D} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

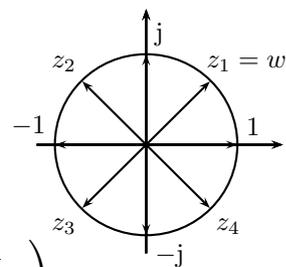
Beispiel 4:

Für $N = 8$ ist $w = e^{j\frac{2\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$.

Mit $z_1 = w$, $z_2 = w^3$, $z_3 = w^5$ und $z_4 = w^7$ (s. Bild) ergibt sich konkret als

Rücktransformationsmatrix

$$D = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z_1 & j & z_2 & -1 & z_3 & -j & z_4 \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & z_2 & -j & z_1 & -1 & z_4 & j & z_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & z_3 & j & z_4 & -1 & z_1 & -j & z_2 \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & z_4 & -j & z_3 & -1 & z_2 & j & z_1 \end{pmatrix}$$



Bemerkungen:

1. Man kann nachrechnen, dass $D \cdot C$ die Einheitmatrix ist, was gerade ausdrückt, dass man durch Hin- und Rücktransformation wieder bei den ursprünglichen Datenpunkten landet (s. Abschnitt B.2.1).
2. Statt der offenbar N^2 Rechenschritte bei der Berechnung (jeweils N Summanden für die N Koeffizienten bzw. Datenpunkte) kann man durch Ausnutzung der speziellen Gestalt von C und D und geschickte Rechnung den Aufwand auf $N \cdot \log N$ drücken (*Fast-Fourier-Transformation, FFT*, s. Abschnitt B.2.2).
3. Man kann die Transformation als Basiswechsel auffassen: Ein N -dimensionaler Datenpunkt $\vec{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})$ wird im Fourierraum durch $\vec{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})$ dargestellt. Dabei erhält man $\vec{f} = D \cdot \vec{c}$, was man als Linearkombination der Spalten von D auffassen kann. Man kann also \vec{c} als Komponenten des Datenpunktes bzgl. einer Basis ansehen, die aus den Spalten von D besteht:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} &= \frac{c_0}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} w^{0 \cdot 0} \\ w^{0 \cdot 1} \\ \vdots \\ w^{0 \cdot (N-1)} \end{pmatrix} + \frac{c_1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} w^{1 \cdot 0} \\ w^{1 \cdot 1} \\ \vdots \\ w^{1 \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{c_2}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} w^{2 \cdot 0} \\ w^{2 \cdot 1} \\ \vdots \\ w^{2 \cdot (N-1)} \end{pmatrix} + \dots + \frac{c_{N-1}}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} w^{(N-1) \cdot 0} \\ w^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots \\ w^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{c_0}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{c_1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ \vdots \\ w^{N-1} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{c_2}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} (w^2)^0 \\ (w^2)^1 \\ \vdots \\ (w^2)^{N-1} \end{pmatrix} + \dots + \frac{c_{N-1}}{\sqrt{N}} \cdot \begin{pmatrix} (w^{N-1})^0 \\ (w^{N-1})^1 \\ \vdots \\ (w^{N-1})^{N-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

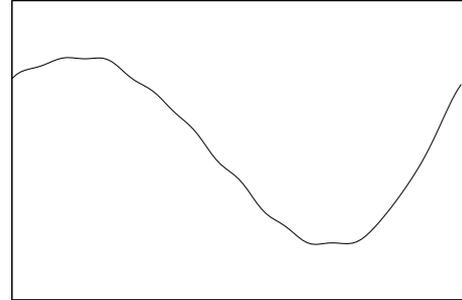
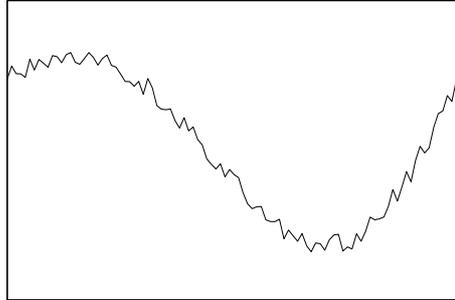
Die n -te Spalte von D besitzt als Einträge also Potenzen von w^n . Für mittlere Werte von n sind diese Einträge am sprunghaftesten; sie repräsentieren die höchsten Frequenzen. Dies kann man ausnutzen, um verrauschte Daten zu filtern: Man berechnet c_0, \dots, c_{N-1} und setzt bei der Rücktransformation die mittleren c_n gleich Null.

Beispiel 5:

Das linke Bild zeigt den Verlauf einer Datenreihe mit 100 Punkten. Dazu wurden die Fourierkoeffizienten c_n , $n = 0, \dots, 99$ berechnet. Das rechte

Bild zeigt den Verlauf der Werte der Rücktransformierten von \tilde{c}_n mit

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} c_n, & \text{für } n = 0, \dots, 10 \text{ und } n = 90, \dots, 99 \\ 0, & \text{für } n = 11, \dots, 89. \end{cases}$$



Literatur: [Hart] 16.3

3.4. Die Laplace-Transformation

3.4.1. Definition

Die Laplace-Transformation ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation. Man beschränkt sich allerdings auf Funktionen, die für $t < 0$ den Wert 0 haben (Interpretation: Beginn erst zu einem endlichen Zeitpunkt). Aus der Fourier-Transformation wird dann

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Schwierigkeiten mit der Konvergenz, z.B. bei der Heaviside-Funktion $H(t)$ kann man entgegentreten mit einem Dämpfungsfaktor $e^{-\sigma t}$: Statt $f(t)$ wird $f(t) \cdot e^{-\sigma t}$ betrachtet. Man erhält als Fourier-Transformierte

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma+j\omega)t} dt.$$

Führt man den komplexen Parameter $s = \sigma + j\omega$ ein, so erhält man die Laplace-Transformation:

Definition 3.10

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\rightarrow \mathbb{C}$) stückweise stetig. Dann heißt

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

die *Laplace-Transformierte* zu f (falls existent).

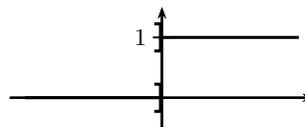
Bemerkungen:

1. Die Zuordnung zwischen einer Funktion f und ihrer Laplace-Transformierten F beschreibt man (genau wie bei der Fourier-Transformation) auch durch $f \circ \bullet F$ (dann muss aus dem Zusammenhang klar sein, ob es sich um die Fourier- oder Laplace-Transformation handelt).
2. Oft existiert die Laplace-Transformierte nicht für alle s sondern nur ab einer bestimmten Dämpfung σ_0 , d.h. für $\text{Re } s > \sigma_0$.
3. Für $s = j\omega$ ergibt sich (falls existent) aus der Laplace-Transformierten die Fourier-Transformierte. Man schreibt daher auch manchmal $F(j\omega)$ anstatt $F(\omega)$ für die Fourier-Transformierte.

Beispiel 1:

Zur Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0. \end{cases}$$



ist

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^A \\ &= \frac{1}{-s} \left(\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-sA} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{-s} (0 - 1) = \frac{1}{s}, \text{ falls } \operatorname{Re} s > 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Im folgenden sind einige Korrespondenzen $f \circ \bullet F = \mathcal{L}(f)$ aufgeführt:

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{1}{n!} t^n e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$
speziell: 1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

Analog zur Fourier-Transformation gibt es Transformationen der Zusammenhänge bei Laplace-Korrespondenzen:

Satz 3.11

Seien $f \circ \bullet F$, $f_i \circ \bullet F_i$ und $g \circ \bullet G$ Laplace-Korrespondenzen.

1. $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \Rightarrow G(s) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
(Superpositions-/Überlagerungssatz)
2. $g(t) = \begin{cases} f(t - t_0), & \text{für } t \geq t_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} (t_0 > 0) \Rightarrow G(s) = e^{-st_0} \cdot F(s)$
(Verschiebungssatz)
3. $g(t) = e^{-at} \cdot f(t) \Rightarrow G(s) = F(s + a)$
(Dämpfungssatz)
4. $g(t) = f\left(\frac{t}{c}\right), (c > 0) \Rightarrow G(s) = c \cdot F(c \cdot s)$
 $g(t) = f(c \cdot t), (c > 0) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{c} \cdot F\left(\frac{1}{c} \cdot s\right)$
(Ähnlichkeitssatz)
5. $g(t) = f'(t) \Rightarrow G(s) = s \cdot F(s) - f(0)$
 $g(t) = f''(t) \Rightarrow G(s) = s^2 \cdot F(s) - sf(0) - f'(0)$
(dabei ist $f(0)$ als rechtsseitiger Grenzwert von f zu verstehen)
allg.: $g(t) = f^{(n)}(t) \Rightarrow G(s) = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6. $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s} F(s)$
7. $g(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \Rightarrow G(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

Bemerkung:

Da hier nur Funktionen f_i mit $f_i(t) = 0$ für $t < 0$ betrachtet werden, ergibt sich als Faltung

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau.$$

Herleitung (von 5.):

Ist f für große t hinreichend klein, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt &\stackrel{\text{part.Int.}}{=} f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot (-s)e^{-st} dt \\ &= 0 - f(0) + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= s \cdot F(s) - f(0). \end{aligned}$$

3.4. Die Laplace-Transformation

Häufig sucht man Rücktransformationen von gebrochen rationalen Funktionen $F(s)$. Durch Partialbruchzerlegung erhält man Anteile $\frac{1}{s-a}$, die auf die Rücktransformation e^{at} führen, und bei nullstellenfreien quadratischen Nenneranteilen solche, die auf die Rücktransformation $\sin(at)$ oder $\cos(at)$ führen.

Beispiel 2:

1. Sei $F(s) = \frac{s}{s^2 - s - 2}$.

Da $s^2 - s - 2$ die Nullstellen 2 und -1 besitzt, ergibt der Partialbruch-Ansatz

$$\frac{s}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s-2)(s+1)}.$$

Einsetzen von 2 und -1 in den Zählern führt zu

$$2 = A \cdot 0 + B \cdot 3 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad -1 = A \cdot (-3) + B \cdot 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3},$$

$$\text{also } F(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s+1} + \frac{\frac{2}{3}}{s-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-(-1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

Die Rücktransformierte ist dann $f(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t}$.

2. Sei $F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 13}$.

Der Nenner ist nullstellenfrei: $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9$.

Vergleich mit den Grundfunktionen legt einen Bestandteil $\cos(3t) \circ \bullet \frac{s}{s^2+9}$ nahe; mit dem Dämpfungssatz (Satz 3.11,3.) erhält man

$$e^{-2t} \cdot \cos(3t) \circ \bullet \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}.$$

Nun kann man F zerlegen:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{s+2-1}{(s+2)^2 + 9} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - \frac{1}{(s+2)^2 + 9}.$$

Damit sieht man, dass bei der Rücktransformation auch der Sinus ins Spiel kommt. Es ist

$$e^{-2t} \cdot \sin(3t) \circ \bullet \frac{3}{(s+2)^2 + 9},$$

so dass die Darstellung

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2 + 9}.$$

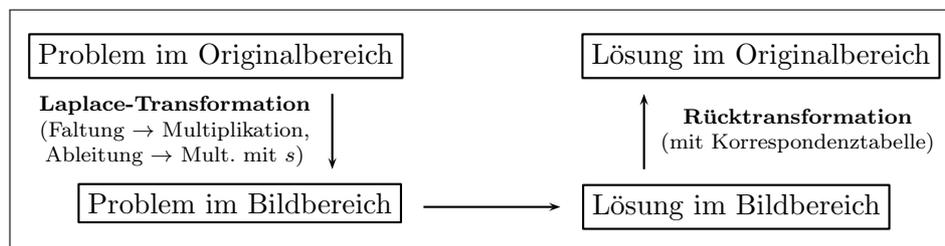
auf folgende Rücktransformation führt:

$$f(t) = e^{-2t} \cdot \cos(3t) - \frac{1}{3} e^{-2t} \cdot \sin(3t).$$

Literatur: [KSt] 16.1, 16.2, 16.3, 16.5; [Walz] 9.5; [FF] 5.3.5; [Leu] 9.1, 9.2; [Pap3] VI.1, VI.2, VI.4

3.4.2. Anwendungen

Das allgemeine Prinzip bei der Anwendung der Laplace-Transformation kann man schematisch wie folgt beschreiben:



Beispiel 1:

Bestimmung der Lösung der Schwingungsgleichung

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Eine Laplace-Transformation mit $y(t) \circ \bullet Y(s)$ bringt wegen $y'(t) \circ \bullet sY(s) - y(0)$ und $y''(t) \circ \bullet s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)$:

$$\begin{aligned}
 & (s^2Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)) + 4 \cdot (sY(s) - y(0)) + 13 \cdot Y(s) = 0 \\
 \Rightarrow & (s^2 + 4s + 13) \cdot Y(s) = s \cdot y(0) + 4y(0) + y'(0) \\
 \Rightarrow & Y(s) = \frac{s \cdot y(0) + 4y(0) + y'(0)}{s^2 + 4s + 13} = \frac{as + b}{(s + 2)^2 + 9} \quad (*)
 \end{aligned}$$

mit festen (durch die Randbedingungen gegebenen) $a, b \in \mathbb{R}$.

Wegen

$$e^{-2t} \cos(3t) \circ \bullet \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 9} \quad \text{und} \quad e^{-2t} \sin(3t) \circ \bullet \frac{3}{(s + 2)^2 + 9}$$

ergibt sich $y(t)$ ähnlich wie beim letzten Beispiel des letzten Abschnitts durch Rücktransformation von (*) als Linearkombination von $e^{-2t} \cos(3t)$ und $e^{-2t} \sin(3t)$.

Bemerkung:

Offensichtlich entspricht das Nennerpolynom $N(s)$ der Lösung im Laplacebereich dem charakteristischen Polynom der Differentialgleichung, während der Zähler nur von den Anfangsbedingungen abhängt (vgl. (*) in Beispiel 1).

Eine reelle Nullstelle s_0 von $N(s)$ führt bei der Partialbruchzerlegung der Lösung zu einem Summand $\frac{A}{s-s_0}$ und damit nach der Rücktransformation zu einem Lösungsbestandteil Ae^{s_0t} , vgl. Satz 2.5.

Bei einem im Reellen nullstellenfreien charakteristischen Polynom lieferte Satz 2.5 mit Hilfe der komplexen Nullstellen Lösungsbestandteile. Diese erhält man auch mittels der Laplace-Theorie aus $N(s)$:

Beispiel 2 (Fortsetzung von Beispiel 1):

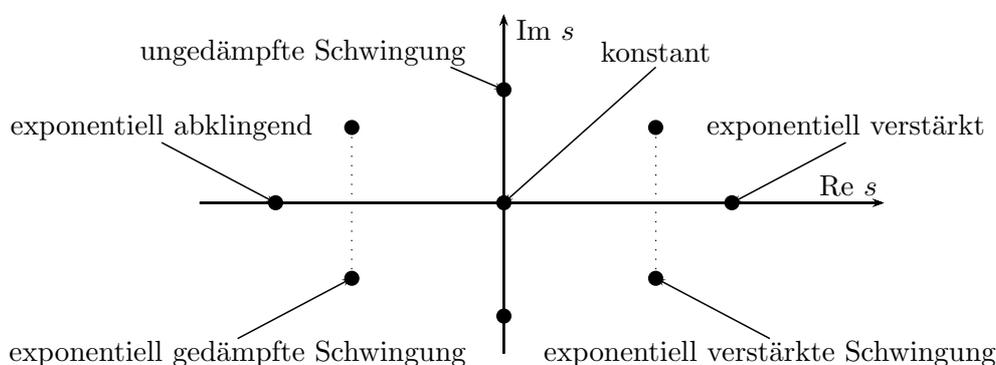
Die Nullstellen von $N(s) = s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 9$ sind

$$s_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{2^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3j.$$

Satz 2.5 liefert damit Lösungsbestandteile $e^{-2t} \cos(3t)$ und $e^{-2t} \sin(3t)$. Dies sind auch genau die Bestandteile, die man bei der Laplace-Rücktransformation von $\frac{as+b}{N(s)}$ erhält (vgl. oben).

Merke:

Die Lage der Polstellen der Laplacetransformierten (=Nullstellen des charakteristischen Polynoms) charakterisiert das Lösungsverhalten:



Beispiel 3:

Die Spannung $u_c(t)$ am Kondensator beim Anlegen einer Spannung U_0 an einen Schwingkreis kann durch die Differenzialgleichung

$$LC \cdot u_c''(t) + RC \cdot u_c'(t) + u_c(t) = U_0 \cdot H(t)$$

mit der Heavisidefunktion $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ beschrieben werden.

Da bei der Laplace-Transformation nur $t > 0$ betrachtet wird und für $t < 0$ der Wert 0 angenommen wird, entspricht das

$$LC \cdot u_c''(t) + RC \cdot u_c'(t) + u_c(t) = U_0 \quad (t > 0).$$

Eine Laplace-Transformation mit $u_c \circ \bullet U_c$ bringt

$$\begin{aligned} LC \cdot (s^2 U_c(s) - s u_c(0) - u_c'(0)) + RC \cdot (s U_c(s) - u_c(0)) + U_c(s) &= U_0 \cdot \frac{1}{s} \\ \Rightarrow (LC s^2 + RC s + 1) \cdot U_c(s) &= U_0 \cdot \frac{1}{s} + LC s \cdot u_c(0) + LC u_c'(0) + RC u_c(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) \cdot U_c(s) = \frac{\text{quadr. Polynom in } s}{s} \\ \Rightarrow & U_c(s) = \frac{\text{quadr. Polynom in } s}{s \cdot \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right)}.\end{aligned}$$

Der Nenner hat Nullstellen in

$$s_0 = 0 \quad \text{und} \quad s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Damit bekommt man einen konstanten Lösungsanteil zu $s_0 = 0$ und

- falls $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$ ist:

Wegen $s_{1,2}$ reell und < 0 : exponentiell gedämpfte Lösungsanteile.

- falls $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ ist:

Wegen $s_{1,2}$ imaginär und $\text{Re } s_{1,2} = -\frac{R}{2L} < 0$: exponentiell gedämpft schwingende Lösungsanteile.

(Vgl. das Beispiel auf Seite 16.)

Literatur: [KSt] 16.6, 16.7; [Walz] 9.5; [FF] 5.3.5; [Leu] 9.3; [Pap3] VI.5

4. Wahrscheinlichkeit und Statistik

4.1. Binomialkoeffizient und Kombinatorik

4.1.1. Binomialkoeffizient

Erinnerung: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (n -Fakultät), insbesondere $0! = 1 = 1!$.

Definition 4.1

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ heißt

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient, gelesen „ n über k “.

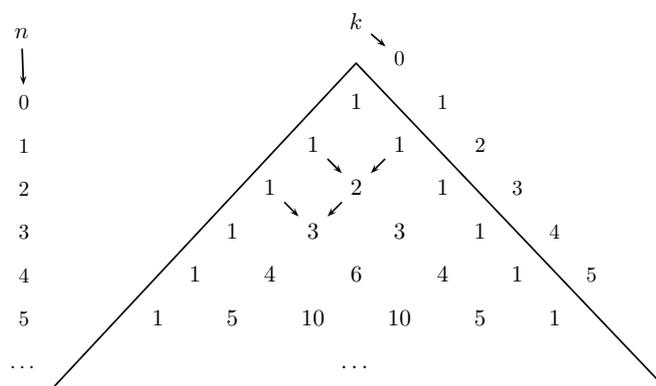
Beispiel 1:

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Satz 4.2

1. Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Die Binomialkoeffizienten kann man sich gut in Form des sog. *Pascalschen Dreiecks* herleiten. Das Dreieck hat am Rand lauter Einsen. Innen ergeben sich die Zahlen durch die Summe der beiden darüber liegenden Werte. Dies entspricht dem Bildungsgesetz 2. aus Satz 4.2.



Satz 4.3 (Binomialsatz)

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R} \text{ gilt } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \binom{2}{0} a^{2-0} \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} \cdot b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot 1 \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \dots \\ &= 1 + n \cdot x + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Der Satz begründet die Bezeichnung „Binomialkoeffizient“ für $\binom{n}{k}$, denn dies sind die Koeffizienten bei der ausmultiplizierten Form der Binomialausdrücke $(a + b)^n$.
2. Dass diese Koeffizienten genau denen entsprechen, die durch das Pascalsche Dreieck gebildet werden, kann man verstehen, wenn man sich überlegt, wie die Koeffizienten von $(a + b)^{n+1} = (a + b) \cdot (a + b)^n$ aus denen von $(a + b)^n$ entstehen.

Beispiel 3:

Beim Ausmultiplizieren von $(a + b)^6$ treten Terme $a^6, a^5b, a^4b^2, \dots, b^6$ auf, also

$$(a + b)^6 = c_0 a^6 + c_1 a^5 b + c_2 a^4 b^2 + c_3 a^3 b^3 + c_4 a^2 b^4 + c_5 a b^5 + c_6 b^6.$$

Bei $(a + b)^7$ gibt es einen Term $a^4 b^3$. Beim Ausmultiplizieren von $(a + b) \cdot (a + b)^6$ erhält man einerseits $a \cdot c_3 a^3 b^3$ und andererseits $b \cdot c_2 a^4 b^2$, d.h. der Koeffizient von $a^4 b^3$ ist gleich $c_2 + c_3$.

Die Koeffizienten von $(a + b)^{n+1}$ ergeben sich also aus der Summe der zwei entsprechenden Koeffizienten von $(a + b)^n$ wie beim Pascalschen Dreieck.

Literatur: [Walz] 11.1.2; [Stingl] 3.2; [Brill] 2.3; [SS] 1.4.1, 1.4.2

4.1.2. Kombinatorik

Eine Urne enthält n verschiedene Kugeln. Als Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten bei k -maligem Ziehen ergibt sich

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Beispiel 1:

Lotto (ohne Zusatzzahl) ist Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. So ergibt sich als Anzahl der möglichen Ziehungsergebnisse bei 6 aus 49:

$$\binom{49}{6} = 13983816.$$

Bemerkungen:

1. Dass man beim Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge n^k Möglichkeiten hat, ist klar, da es für jede Ziehung n Möglichkeiten gibt.
2. Die Anzahl beim Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge ist auch klar, da man für die erste Stelle man n Möglichkeiten hat, für die zweite (nachdem die erste Stelle festliegt) noch $n - 1$ Möglichkeiten u.s.w.. Mit k Faktoren ergibt sich dann

$$\begin{aligned} n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot \dots \cdot 1}{(n - k) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!}. \end{aligned}$$

3. Das Auftreten der Binomialkoeffizienten als Anzahl der Ziehungsergebnisse ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge kann man sich wie folgt verdeutlichen:

Sei $c_{k,n}$ die Anzahl der Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.

Fügt man nun ein neues $(n + 1)$ -tes Element hinzu und zieht k Elemente, so kann man entweder das neue Element und $k - 1$ Elemente aus den ursprünglichen n Elementen ziehen (entspricht $c_{k-1,n}$ vielen Möglichkeiten) oder nicht das neue sondern nur k Elemente aus den ursprünglichen n Elementen wählen (entspricht $c_{k,n}$ vielen Möglichkeiten). Also ist $c_{k,n+1} = c_{k-1,n} + c_{k,n}$, was dem Bildungsgesetz im Pascalschen Dreieck entspricht.

Bemerkung:

Eine bestimmte Anordnung von Elementen einer Menge nennt man *Permutation*.

Dies entspricht dem Ziehen von n aus n Elementen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ verschiedene Permutationen einer n -elementigen Menge, was man auch direkt durch eine Überlegung wie oben sieht: Für die erste Stelle hat man n Möglichkeiten; für die zweite (nachdem die erste Stelle festliegt) noch $n - 1$ Möglichkeiten u.s.w. bis man für die letzte Stelle nur noch eine Möglichkeit hat. Dies ergibt $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

Komplexere Probleme kann man versuchen zu behandeln, indem man sich überlegt, wie man alle Möglichkeiten realisieren kann.

Beispiel 2:

1. Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die neun Buchstaben AAAABBBCC anzuordnen?

Zunächst kann man unter den neun Plätzen 4 Plätze für die 4 A reservieren ($\binom{9}{4}$ Möglichkeiten). Unter den verbleibenden 5 Plätzen reserviert man 3 für die drei B ($\binom{5}{3}$ Möglichkeiten). Auf die restlichen Plätze kommen die C. Insgesamt erhält man

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot 1 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 1 = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Möglichkeiten.

Man kann allerdings auch in anderer Reihenfolge vorgehen: Zunächst kann man zwei Plätze für die C reservieren ($\binom{9}{2}$ Möglichkeiten), dann 3 für die B ($\binom{7}{3}$ Möglichkeiten) und auf den restlichen Stellen die A setzen. Die Anzahl der Möglichkeiten berechnet sich nun durch

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot 1 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$$

Bemerkung:

Allgemein erhält man bei einer Menge, die n_1 Objekte erster Art, n_2 Objekte zweiter Art, u.s.w. bis zur k -ten Art enthält, also insgesamt $n = n_1 + \dots + n_k$ Elemente, als Anzahl möglicher Anordnungen

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Diesen Ausdruck nennt man auch *Multinomialkoeffizient*.

2. Wieviel 5-buchstabile Worte des üblichen Alphabets (mit 26 Buchstaben) gibt es, die genau zwei „E“s besitzen?

Zunächst kann man die Plätze für die zwei „E“s festlegen. Dazu gibt es

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Möglichkeiten. An den anderen drei Stellen kann dann ein beliebiger der 25 anderen Buchstaben stehen, was jeweils 25^3 Möglichkeiten macht.

Insgesamt gibt es also $10 \cdot 25^3$ Möglichkeiten.

3. Wieviel Möglichkeiten gibt es, bei einem Skatspiel aus den üblichen 32 Karten 10 Karten auszuwählen, so dass darunter genau 3 Herz-Karten sind?

Man kann dies realisieren, indem man 3 aus den 8 Herz-Karten auswählt ($\binom{8}{3}$ Möglichkeiten) und dann die übrigen 7 Karten aus den 24 nicht-Herz-Karten ($\binom{24}{7}$ Möglichkeiten), also insgesamt $\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{7}$ Möglichkeiten.

Literatur: [Walz] 11.1.2; [Stingl] 3.2; [Leu] 12.1; [Brill] 2.3; [SS] 1.4.3

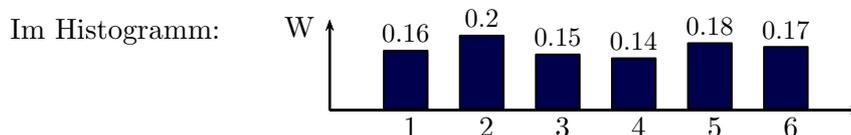
4.2. Wahrscheinlichkeit

4.2.1. Diskrete Ereignisse

Beispiel 1:

1. Bei einem Münzwurf gibt es die Ergebnisse „Kopf“ oder „Zahl“. Bei einer „fairen“ Münze kommt jedes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ vor.
2. Bei einem „fairen“ Würfel kommt jede Augenzahl (1,2,...,6) gleich wahrscheinlich vor. Die Wahrscheinlichkeit ist jeweils $\frac{1}{6}$.
3. Bei einem ungleichmäßigen Würfel könnte es die folgenden Auftrittswahrscheinlichkeiten geben:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.16	0.2	0.15	0.14	0.18	0.17



Definition 4.4

Bei einem Zufallsexperiment mit endlich vielen Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ kann man jedem Ergebnis ω_k eine Wahrscheinlichkeit $p(\omega_k) = p_k$ zuordnen.

Es gilt dann $\sum_{k=1}^N p_k = 1$.

Spezielle Zufallsexperimente:

1. Ein *Laplace-Experiment* ist ein Zufallsexperiment, bei dem jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist. Für jedes k gilt dann $p_k = \frac{1}{N}$.
2. Ein *Bernoulli-Experiment* ist ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen ω_1, ω_2 . Ist $p = p(\omega_1)$, so ist $p(\omega_2) = 1 - p$.

Bemerkungen:

1. Übliche Bezeichnungen sind:

Ω = Menge aller möglichen Ergebnisse,

$P(A)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis in einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ liegt.

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses charakterisiert, wie häufig dieses Ergebnis bei vielen Durchführungen des Zufallsexperiments auftritt.

Dies nutzt man bei *Monte-Carlo-Simulationen* aus, um Wahrscheinlichkeiten experimentell zu bestimmen: Man führt das Experiment N mal durch. Tritt dabei das Ereignis ω_k n_k mal auf, so ist $p(\omega_k) \approx \frac{n_k}{N}$.

Beispiel 2:

- Der Wurf mit einem fairen Würfel ist ein Laplace-Experiment. Betrachtet man nur die Fälle „Der Wurf ergibt eine 6“ und „Der Wurf ergibt keine 6“, so ist dies ein Bernoulli-Experiment mit $p = \frac{1}{6}$.
- Bei einem Wurf mit zwei fairen Würfeln sind alle Ergebnisse

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

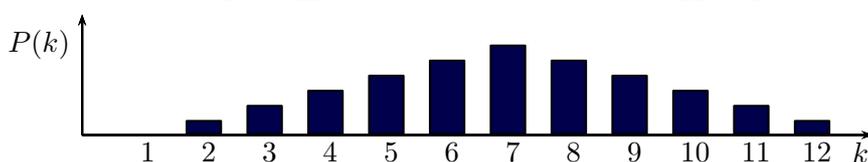
gleich wahrscheinlich, d.h. jedes Tupel (Augenzahl 1. Würfel, Augenzahl 2. Würfel) hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Bei einem Wurf mit zwei Würfeln erhält man 5 als Augensumme bei den Ergebnissen (1, 4), (2, 3), (3, 2) und (4, 1). Die Wahrscheinlichkeit für „Augensumme = 5“ ist somit $4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$. Ähnliche Überlegungen für andere Summenwerte ergeben die folgende Tabelle:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\text{Augensumme} = k)$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Die Summe der Werte ist

$$0 + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = 1.$$

**Satz 4.5**

- Bei der Kombination zweier unabhängiger Zufallsexperimente ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnistupel als Produkt der entsprechenden Einzelwahrscheinlichkeiten.
- Die Wahrscheinlichkeit für eine diskrete Ergebnismenge ergibt sich als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$\text{Für } A \subseteq \Omega \text{ ist } P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p(\omega_k).$$

Bemerkungen:

- Aus Definition 4.4 folgt $P(\Omega) = 1$.

2. Bei einem Laplace-Experiment gilt für $A \subseteq \Omega$:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{\text{Anzahl „günstiger Fälle“}}{\text{Gesamtanzahl}}$$

Beispiel 3 (vgl. Beispiel 2):

Beim Würfeln mit 2 Würfeln sind alle Ergebnistupel gleich wahrscheinlich. Es ist also ein Laplace-Experiment mit

$$\Omega = \{(1, 1), \dots, (1, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}.$$

Für

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Tupel} \mid \text{Summe der Augen} = 5\} \\ &= \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \end{aligned}$$

$$\text{ist } P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Beispiel 4:

Bei einer Glühbirnen-Produktion sei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne defekt ist, $p_D = \frac{1}{15}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Birnen genau eine defekte zu haben?

Modellierung als 10-faches Bernoulli-Experiment mit

$$\begin{aligned} P(\text{„Birne defekt“}) &= p_D, \\ P(\text{„Birne intakt“}) &= 1 - p_D. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „dritte Birne defekt, Rest intakt“ ist:

$$\begin{aligned} \begin{array}{cccccc} \text{Birne} & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & & 10 \\ \text{Wahrscheinlichkeit} & = & (1 - p_D) & \cdot & (1 - p_D) & \cdot & p_D & \cdot & (1 - p_D) & \cdot & \dots & \cdot & (1 - p_D) \end{array} \\ &= p_D \cdot (1 - p_D)^9. \end{aligned}$$

Genauso erhält man für das Ereignis „sechste Birne defekt, Rest intakt“ die Wahrscheinlichkeit $p_D \cdot (1 - p_D)^9$.

Das Ereignis „genau eine von 10 Birnen defekt“ ergibt sich als Summe der Ereignisse „ k -te Birne defekt, Rest intakt“, also

$$\begin{aligned} &P(\text{„genau eine von 10 Birnen defekt“}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} P(\text{„}k\text{-te Birne defekt, Rest intakt“}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} p_D \cdot (1 - p_D)^9 \\ &= 10 \cdot p_D \cdot (1 - p_D)^9 = 10 \cdot \frac{1}{15} \left(\frac{14}{15}\right)^9 \approx 0.36. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Beispiel 4 kann man verallgemeinern:

Betrachtet wird die n -fache Ausführung eines Bernoulli-Experiments mit den Ergebnissen ω_0 und ω_1 , $p = p(\omega_0)$, $p(\omega_1) = 1 - p$. Dann gilt:

$$p_k := P(\text{„genau } k\text{-mal } \omega_0\text{“}) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

Anzahl der Möglichkeiten k -mal ω_0 auf n Plätze zu verteilen ($\hat{=}$ Ziehung k aus n)

Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Kombination mit k -mal ω_0 und $(n-k)$ -mal ω_1

Eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt *Binomial-Verteilung*. Sinnvoll ist hier nur $k = 0, 1, \dots, n$. Tatsächlich ist nach dem Binomialsatz 4.3

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (p + (1-p))^n = 1^n = 1. \end{aligned}$$

2. Man kann ähnlich auch Zufallsexperimente mit abzählbar unendlich vielen Ergebnissen betrachten.

Beispiel 5:

Wie oft muss man würfeln um zum ersten Mal eine 6 zu erhalten? Bzw. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_k nach k Würfeln zum ersten Mal eine 6 zu würfeln?

Die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln ist $p = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit keine 6 zu würfeln ist dann $1 - p = \frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_k &:= P(\text{„nach } k \text{ Würfeln zum ersten Mal eine 6“}) \\ &= P(\text{„die ersten } k-1 \text{ Würfeln keine 6“}) \cdot P(\text{„}k\text{-ter Wurf ist eine 6“}) \\ &= (1-p)^{k-1} \cdot p. \end{aligned}$$

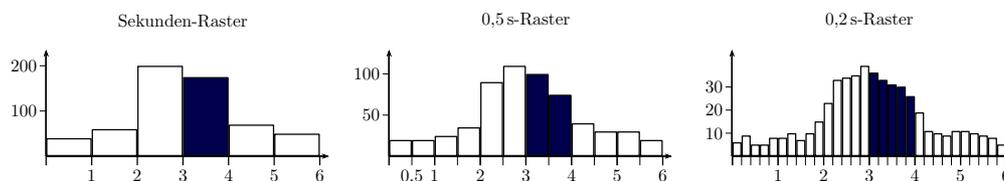
3. Eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $p_k = (1-p)^{k-1} \cdot p$ mit einem $p \in [0, 1]$ und $k = 1, 2, 3, \dots$ heißt *geometrische Verteilung*. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (1-p)^l \\ &= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1. \end{aligned}$$

Literatur: [Walz] 11.1.1, 11.1.4, 11.2.1; [Leu] 12.2, 12.3, 12.4; [Brill] 15.2; [Pap3] II.4.3, II.6.1

4.2.2. Wahrscheinlichkeitsdichte

Betrachtet man den zeitlichen Abstand zwischen Autos, die an einer bestimmten Stelle vorbei fahren, ist eine entsprechende Zuordnung (z.B. „Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand genau 3,415 Sekunden ist“) nicht sinnvoll. Man kann allerdings Intervallen eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, z.B. dass der Abstand zwischen 1s und 2s ist oder zwischen 2s und 3s u.s.w.. So erhält man beispielsweise folgende Histogramme:



Definition 4.6

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ beschreibt eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* auf $\Omega = \mathbb{R}$.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \mathbb{R}$ ergibt sich durch

$$P(A) = \int_A f(x) dx.$$

Bemerkungen:

1. f heißt auch *Verteilungsdichtefunktion*.
2. Bei einem Zufallsexperiment mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte f ist die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ergebnis gleich 0:

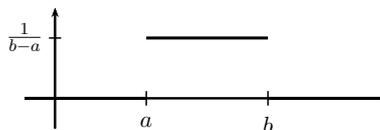
$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0.$$

Daher ist es bei Intervallen irrelevant, ob die Grenzen eingeschlossen sind oder nicht:

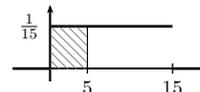
$$P([c, d]) = P(]c, d]) = P(]c, d]).$$

Spezielle Verteilungen:1. Gleichverteilung auf $[a, b]$:

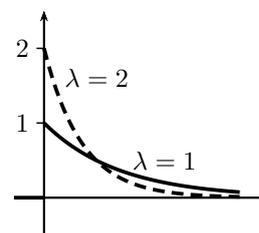
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beispiel 1:**

Ein Bus fährt alle 15 Minuten. Wenn man nicht weiß, wann er genau fährt, und irgendwann zur Haltestelle geht, ist die Wartezeit gleichverteilt auf $[0, 15]$ (in Minuten). Die Wahrscheinlichkeit, dass man weniger als 5 Minuten warten muss, ist $\int_0^5 \frac{1}{15} dx = \frac{1}{3}$.

2. Exponentialverteilung mit Parameter λ :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$



Man kann leicht nachrechnen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ist.

Die Exponentialverteilung spielt bei Warte- oder Ausfallprozessen eine Rolle.

Beispiel 2:

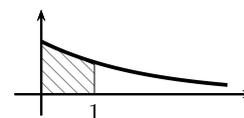
In einem Call-Center ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Anrufen exponentialverteilt. Bei einem frequentierten Call-Center ist λ groß, bei wenig nachgefragtem Call-Center ist λ klein.

Beispiel 3:

Ein Zufallsexperiment sei exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{1}{2}$.

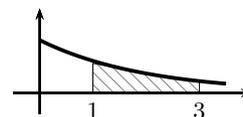
Dann ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis kleiner 1 ist:

$$\begin{aligned} P([0, 1]) &= \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = -e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_0^1 \\ &= -e^{-\frac{1}{2}} + 1 \approx 0.39. \end{aligned}$$



Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis zwischen 1 und 3 ist

$$\begin{aligned} P([1, 3]) &= \int_1^3 \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = -e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_1^3 \\ &= -e^{-1.5} + e^{-0.5} \approx 0.38. \end{aligned}$$



3. Normalverteilung mit Parameter μ und σ^2 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

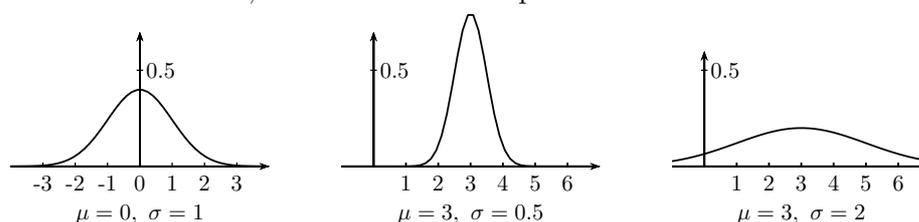
μ heißt *Mittelwert* oder *Erwartungswert*, σ heißt *Standardabweichung* und σ^2 *Varianz*.

Der Spezialfall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, also

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

heißt *Standardnormalverteilung*.

Die Dichte f ist symmetrisch um μ und hat dort ihr Maximum; ein großes σ entspricht einer flachen Form, ein kleines σ einer spitzen Form.



$\mu \pm \sigma$ sind genau die Wendestellen der Dichtefunktion.

Die Normalverteilung entsteht, wenn sich viele unabhängige Zufallsprozesse überlagern.

Beispiel 4:

1. Durch viele verschiedene Störeinflüssen ergeben Messungen, z.B. die Messung eines Widerstandswertes, zufällig Ergebnisse um den wahren Wert. Eine Messung wird oft interpretiert als ein normalverteiltes Zufallsexperiment mit $\mu =$ „wahrer Wert“ und σ klein bei genauer und groß bei ungenauer Messung.
2. Bei der Serienproduktion, z.B. von 100 Ω -Widerständen, unterscheiden sich die Produkte auf Grund von Toleranzen. Die Werte können als normalverteilt modelliert werden.

Bemerkung:

Durch entsprechende Umskalierung kann man Wahrscheinlichkeitswerte von beliebigen Normalverteilungen auf solche von Standardnormalverteilungen zurückführen.

Beispiel 5:

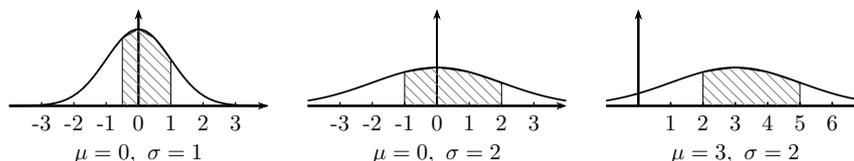
Betrachtet werden Wahrscheinlichkeitswerte zu drei Normalverteilungen:

- $P_{0,1}$ zur Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$),

- $P_{0,2}$ zu einer „gestreckten“ Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 2$,
- $P_{3,2}$ zu einer zusätzlich verschobenen Normalverteilung mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$.

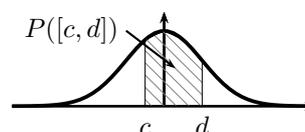
Dann gilt für entsprechende Wahrscheinlichkeitswerte beispielsweise

$$P_{0,1}([-0.5, 1]) = P_{0,2}([-1, 2]) = P_{3,2}([2, 5]).$$



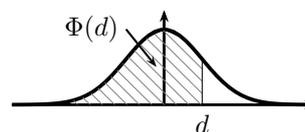
Die Wahrscheinlichkeitswerte

$$P_{0,1}([c, d]) = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



zur Standardnormalverteilung sind nicht elementar integrierbar. Die Werte von

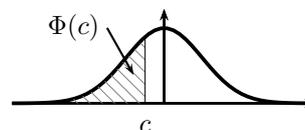
$$\Phi(x) := P_{0,1}([-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



sind tabelliert (siehe Anhang C).

Damit erhält man

$$P_{0,1}([c, d]) = \Phi(d) - \Phi(c).$$



Satz 4.7

Bei einem mit (μ, σ^2) -normalverteiltem Zufallsexperiment ist

$$P([a, b]) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right),$$

mit $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Beispiel 6:

(Vgl. Beispiel 5.) Für eine Normalverteilung mit $\mu = 3$ und $\sigma = 2$ ist

$$P([2, 5]) = \Phi\left(\frac{5 - 3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2 - 3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0,5).$$

Entsprechend der Tabelle in Anhang C ist $\Phi(1) \approx 0,84134$ und

$$\Phi(-0,5) = 1 - \Phi(0,5) \approx 1 - 0,69146 = 0,30854,$$

also

$$P([2, 5]) \approx 0,84134 - 0,30854 = 0,5328.$$

Bemerkung:

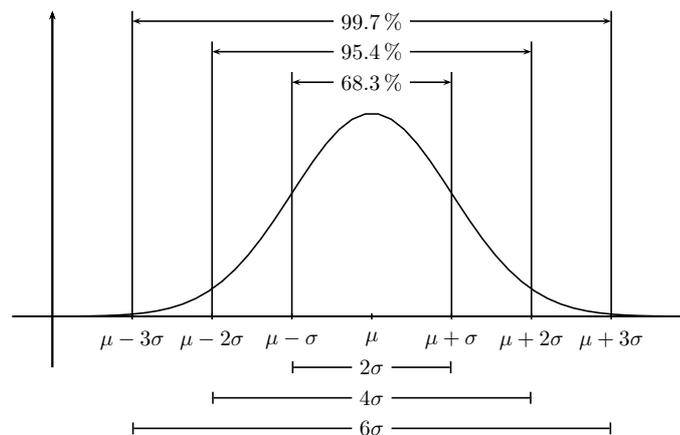
Bei einer (μ, σ^2) -Normalverteilung ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Bereich einer k -fachen Standardabweichung um den Mittelwert

$$\begin{aligned} P([\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) &= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) \\ &= 2 \cdot \Phi(k) - 1, \end{aligned}$$

also nur von k abhängig. Im Bereich $\pm 1\sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit also z.B.

$$P([\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \approx 2 \cdot 0,84134 - 1 = 0,68268.$$

Für weitere Werte ergibt sich:



Genau 95% erhält man bei $\mu \pm 1,96\sigma$, genau 99% bei $\mu \pm 2,58\sigma$.

Beispiel 7:

1% -Widerstände sind solche bei denen die Fertigungstoleranzen so sind, dass maximal 5% der Widerstände um mehr als 1% vom angegebenen Widerstandswert abweichen.

Bei 1% -100 Ω -Widerständen ist also $1,96\sigma = 1 \Omega$.

Literatur: [Walz] 11.2.2; [Leu] 12.4; [Brill] 15.3, 15.4; [Pap3] II.4.4, II.6.4

4.3. Zufallsvariablen

Definition 4.8

Beschreibt $X \in \mathbb{R}$ das Ergebnis eines Zufallsexperiments, so nennt man X auch *Zufallsvariable*. Ein konkretes Ergebnis nennt man *Realisierung*. Kann X nur endlich oder abzählbar viele Werte annehmen, so heißt X *diskrete Zufallsvariable*, ansonsten *stetige Zufallsvariable*.

Entsprechend der auftretenden Wahrscheinlichkeiten sagt man z.B. „ X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 3$ “ oder „ X ist auf M gleichverteilt“.

Beispiel 1:

Bei einem Gewinnspiel würfelt der Teilnehmer und erhält die Augenzahl in Euro. Dies kann man als diskrete Zufallsvariable mit möglichen Werten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 betrachten. Wieviel erhält der Spieler im Durchschnitt? Wie ist es bei einem Würfel mit vier Zweien und zwei Sechsen?

Bei einem normalen Würfel ist der Durchschnitt offensichtlich 3,5.

Bei einem mit vier Zweien und zwei Sechsen beschriebenen Würfel erhält man bei vielen Durchführungen in ca. zwei Drittel der Fälle 2€ und in einem Drittel der Fälle 6€. Bei N Durchführungen ist also

$$\begin{aligned} \text{mittlerer Gewinn} &= \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{2}{3}N \cdot 2\text{€} + \frac{1}{3}N \cdot 6\text{€} \right) \\ &= 2\text{€} \cdot \frac{2}{3} + 6\text{€} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\text{€}. \end{aligned}$$

Die Werte $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ entsprechen dabei genau den Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse 2€ und 6€.

Definition 4.9

Zu einer Zufallsvariablen X definiert man den *Erwartungswert* $E(X)$ und die *Varianz* $V(X)$ durch

- falls X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten x_1, x_2, \dots und Wahrscheinlichkeiten $p(x_1), p(x_2), \dots$ ist:

$$E(X) = \sum_{x_k} x_k \cdot p(x_k), \quad V(X) = \sum_{x_k} (x_k - E(X))^2 \cdot p(x_k).$$

- falls X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f ist:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx.$$

$\sqrt{V(X)}$ heißt *Standardabweichung* von X .

Beispiel 2:

1. Eine Zufallsvariable X nehme die Werte 1, 2 oder 4 an mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 1) = 0.2, \quad P(X = 2) = 0.5 \quad \text{und} \quad P(X = 4) = 0.3.$$

Dann ist

$$E(X) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 2.4$$

und

$$V(X) = (1 - 2.4)^2 \cdot 0.2 + (2 - 2.4)^2 \cdot 0.5 + (4 - 2.4)^2 \cdot 0.3 = 1.24$$

Die Standardabweichung ist dann $\sqrt{V(X)} = \sqrt{1.24} \approx 1.11$.

2. Zu einer Bernoulli-Zufallsvariable X mit den Werten 1, 0 und $P(X = 1) = p$, also $P(X = 0) = 1 - p$, ist

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

$$\begin{aligned} V(X) &= (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = (1 - p) \cdot p \cdot ((1 - p) + p) \\ &= (1 - p) \cdot p. \end{aligned}$$

3. Ist X gleichverteilt auf $[a, b]$, so ist

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Satz 4.10

1. Ist X exponentialverteilt mit Parameter λ , so ist

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

2. Ist X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2 , so ist

$$E(X) = \mu \quad \text{und} \quad V(X) = \sigma^2.$$

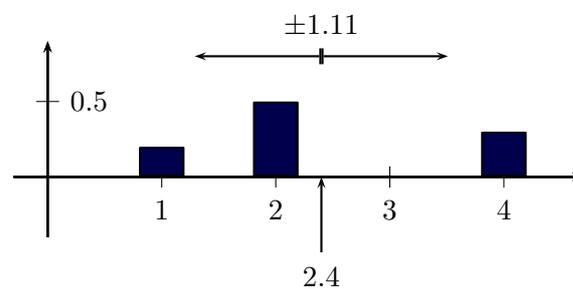
Die Standardabweichung ist gleich σ .

Bemerkungen:

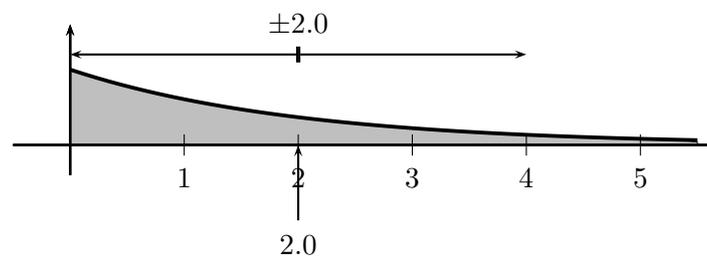
1. Der Erwartungswert gibt den Schwerpunkt an von
 - Gewichten $p(x_k)$, die an den Stellen x_k positioniert sind (bei einer diskreten Zufallsvariablen),
 - der Wahrscheinlichkeitsdichte (bei einer stetigen Zufallsvariablen).
2. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der Werte.
Die Varianz hat keine anschauliche Bedeutung. Mit ihr lässt sich aber besser rechnen.

Beispiel 3:

1. Bei den Werten aus Beispiel 2.1 ergibt sich bildlich mit Erwartungswert 2.4 und Standardabweichung 1.11:



2. Bei einer Exponentialverteilung mit $\lambda = 0.5$ ist der Erwartungswert gleich 2.0 und auch die Standardabweichung gleich 2.0.



Literatur: [Walz] 11.2; [Stingl] 11.8; [Leu] 12.4; [Brill] 15.3, 15.4; [SS] 11.4.2; [Pap3] II.5

4.4. Statistik

Oft hat man Situationen, in denen man die Parameter der zugrunde liegenden Verteilung nicht kennt. Man kann dann Beobachtungen machen.

Definition 4.11

Zu einer *Stichprobe* bestehend aus n Beobachtungen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt

$$1. \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{Mittelwert der Stichprobe,}$$

$$2. s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \text{Varianz der Stichprobe,}$$

$$3. s = \sqrt{s^2} \quad \text{Standardabweichung der Stichprobe.}$$

Bemerkung:

Oft markiert man bei einer Stichprobe den Mittelwert \pm Standardabweichung.

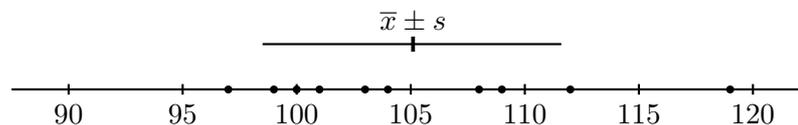
Beispiel 1:

Bei einem Biegeversuch wird geprüft, nach wieviel Biegevorgängen ein Material bricht. Man erhält folgende Zahlen:

100, 118, 97, 104, 112, 99, 109, 108, 103, 101.

Der Mittelwert ist $\bar{x} = \frac{1}{10}(100 + 118 + 97 + \dots + 101) = 105.1$.

Für die Varianz ergibt sich $s^2 = 43.2$ und damit die Standardabweichung $s = 6.6$.


Bemerkung:

Manchmal betrachtet man auch den *Median*; das ist der Wert, so dass 50% der Stichprobenwerte unterhalb und 50% oberhalb liegen.

In Beispiel 1 liegt der Median zwischen 103 und 104.

Der Median ist unempfindlich gegenüber Ausreißern.

Kennt man die Art der Verteilung, aber nicht den Wert / die Werte der Parameter, kann man Mittelwert, Varianz oder ähnliches zur Parameterschätzung nutzen.

Satz 4.12

Bei immer größer werdendem Stichprobenumfang zu einer Zufallsvariablen X gilt:

1. Der Stichproben-Mittelwert \bar{x} konvergiert in gewissem Sinn gegen $E(X)$.
2. Die Stichproben-Varianz s^2 konvergiert in gewissem Sinn gegen $V(X)$.

Beispiel 2:

Eine Produktionstraße soll 100 Ω -Widerstände herstellen.

Die Produktion kann man als (μ, σ^2) -normalverteilt modellieren. Durch Ziehen einer Stichprobe kann man $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma^2 \approx s^2$ schätzen.

Bemerkung:

Hat man eine diskrete Zufallsvariable mit den möglichen Ereignissen x_1, \dots, x_N und kennt deren wahre Wahrscheinlichkeiten $p(x_k)$, so berechnet sich der Erwartungswert $E(X)$ durch $E(X) = \sum_{k=1}^N x_k \cdot p(x_k)$. Dabei bezeichnet N die Anzahl der möglichen Ereignisse und jedes Ereignis kommt in der Summe nur ein Mal vor.

Bei der Berechnung eines Stichproben-Mittelwerts $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ bezeichnet n die Anzahl der Stichproben. Unter den x_k können nun auch Wiederholungen auftreten.

Beispiel 3:

Eine Zufallsvariable X nehme die Werte 1, 2 oder 4 an mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.5$ und $P(X = 4) = 0.3$. Dann ist

$$E(X) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 = 2.4.$$

Eine Stichprobe könnte beispielsweise folgende zehn Werte liefern:

$$1, 4, 2, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4.$$

Der Stichproben-Mittelwert ist dann

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot (1 + 4 + 2 + 2 + 1 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4) = 2.3.$$

Literatur: [Walz] 11.3; [Stingl] 11.2; [Leu] 12.5.1; [Brill] 15.1; [Pap3] III.2

5. Informatik-relevante Themen

5.1. Vollständige Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion:

Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{Z}$ abhängige Aussage.

Kann man die Implikation (Folgerung) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ zeigen (Induktionsschritt) und ferner zeigen, dass $A(n_0)$ gilt (Induktionsanfang), so gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiel 1:

Seien a_0, a_1, \dots rekursiv definiert durch $a_0 = 0, a_{n+1} = a_n + 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_0 &= 0, \\ a_1 &= a_0 + 2 = 0 + 2 = 2, \\ a_2 &= a_1 + 2 = 4, \\ &\vdots \\ a_{13} &= 13 \cdot 2 = 26 \end{aligned}$$

Vermutung: $a_n = 2 \cdot n$.

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n_0 = 0$

$$a_0 = 0 = 2 \cdot 0 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Induktionsvoraussetzung (IV): $a_n = 2n$

Zu zeigen: $a_{n+1} = 2(n+1)$.

Es gilt:

$$a_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} a_n + 2 \stackrel{\text{IV}}{=} 2n + 2 = 2(n+1).$$

Der Induktionsanfang ist wichtig! Sei beispielsweise b_0, b_1, \dots rekursiv definiert durch $b_0 = 1, b_{n+1} = b_n + 2$. Dann kann der Induktionsschritt genauso wie oben durchgeführt werden, aber offensichtlich gilt nicht $b_n = 2n$.

Satz 5.1

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis (mit vollständiger Induktion):

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}. \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Zu zeigen: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n+1 \\ &= (n+1) \frac{n}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Satz 5.2 (Bernoulli-Ungleichung)

Für alle $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Beweis der Bernoulli-Ungleichung:

Sei $x \geq -1$ beliebig.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1 \cdot x \quad \checkmark$$

Induktionsschritt ($n \rightarrow n+1$):

Induktionsvoraussetzung: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Zu zeigen: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. && \text{da } nx^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Literatur: [Walz] 1.4; [Stingl] 3.1; [Brill] 3.4; [Hart] 3.2; [SS] 2.4

5.2. Quantoren

Zur abkürzenden und prägnanten Formulierung benutzt man folgende Symbole:

\forall : „ $\forall x \in M$ “ bedeutet: „für alle $x \in M$ “

\exists : „ $\exists x \in M$ “ bedeutet: „es gibt mindestens ein $x \in M$ “

Man nennt diese Symbole *Quantoren*.

Bemerkung:

\forall und \exists sind nicht vertauschbar!

Beispiel 1:

„ $\forall m \in \{\text{Menschen}\} \exists t \in \{\text{Tage}\}: m$ wurde an t geboren“

bedeutet: Für alle Menschen m gibt es einen Tag t , so dass gilt: m wurde an t geboren, was offensichtlich richtig ist.

„ $\exists t \in \{\text{Tage}\} \forall m \in \{\text{Menschen}\}: m$ wurde an t geboren“ (*)

bedeutet: Es gibt einen Tag t , so dass für alle Menschen m gilt: m wurde an t geboren, was offensichtlich falsch ist.

Die Negation einer Aussage A wird mit \bar{A} , $\neg A$ oder $!A$ bezeichnet.

Die Negation von „ $\forall x \in M : A(x)$ “ ist „ $\exists x \in M : A(x)$ gilt nicht“:

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in M : \neg A(x).$$

Die Negation von „ $\exists x \in m : A(x)$ “ ist „ $\forall x \in M : A(x)$ gilt nicht“:

$$\neg(\exists x \in m : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M : \neg A(x).$$

Entsprechend geht man bei mehreren Quantoren vor.

Beispiel 2:

Die Negation der falschen Aussage (*) von oben ist:

$$\forall t \in \{\text{Tage}\} \exists m \in \{\text{Menschen}\}: m \text{ wurde nicht an } t \text{ geboren.}$$

Diese Aussage ist nun wieder richtig.

Beispiel 3:

$\forall a \in \{\text{Autos}\}: a$ ist rot oder a ist gelb.

Die Negation dieser falschen Aussage ist richtig:

$\exists a \in \{\text{Autos}\}: a$ ist nicht rot und a ist nicht gelb.

Literatur: [Brill] 3.3; [Hart] 2.3

5.3. Relationen

Definition 5.3

Seien M, N Mengen. Dann heißt

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

kartesisches Produkt von M und N , entsprechend für mehr als zwei Mengen.

Beispiel 1:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

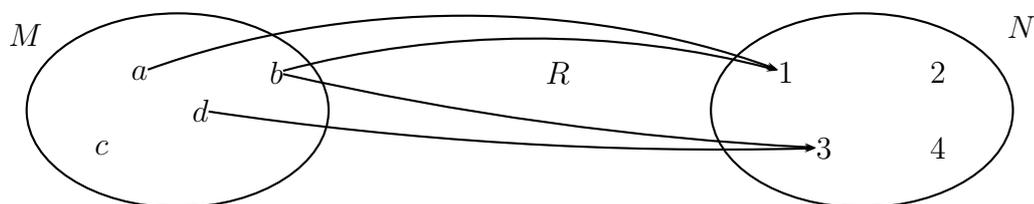
Definition 5.4

Seien M, N Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$ heißt *Relation*.

Statt $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy oder $R(x, y)$.

Beispiel 2:

1. $R := \{(x, y) \mid x \leq y\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Sei $M := \{\text{Matrikelnummern}\}$ und $S := \{\text{Studierende}\}$ und $B := \{\text{Bücher der Bibliothek}\}$. Man kann dann folgende Relationen betrachten:
 - $T \subseteq M \times S$ mit $(m, s) \in T \Leftrightarrow$ Student s hat die Matrikelnummer m .
Dabei gehört zu jedem Studierenden genau eine Matrikelnummer.
 - $R_1 \subseteq S \times B$ mit $(s, b) \in R_1 \Leftrightarrow$ Student s hat aktuell das Buch b ausgeliehen.
Dabei kann es zu einem Studenten mehrere Bücher geben, aber zu einem Buch maximal einen Studenten.
 - $R_2 \subseteq S \times B$ mit $(s, b) \in R_2 \Leftrightarrow$ Student s hat irgendwann mal das Buch b ausgeliehen.
Hier kann es nun zu einem Buch auch mehrere Studenten geben. Es ist $R_1 \subseteq R_2$.
3. Sei $M = \{a, b, c, d\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann wird durch das folgende Bild eine Relation R auf $M \times N$ beschrieben:



Es ist $R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 3), (d, 3)\}$ bzw. $aR1, bR1, bR3$ und $dR3$.

Bemerkungen:

1. Eine Relation $R \subseteq M \times N$ bezeichnet man auch als 2-stellige Relation. Entsprechend heißt eine Teilmenge $R \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ n -stellige Relation.
2. Eine Abbildung/Funktion $f : M \rightarrow N$ kann man auch als Relation auffassen:

$$R = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N.$$

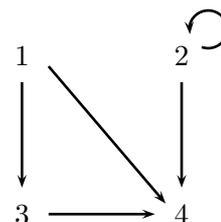
Umgekehrt kann man eine Relation $R \subseteq M \times N$, bei der es zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$ gibt, als Funktion auffassen.

3. Ist $M = N$, so sagt man auch, R ist eine (binäre) Relation auf M .

Beispiel 3:

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Relation R auf M definiert durch $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 4)\}$.

R kann man auch durch ein Bild wie nebenstehend beschreiben.

**Definition 5.5**

Eine Relation R auf M heißt

$$\text{reflexiv} \Leftrightarrow \forall x \in M : xRx$$

$$\text{transitiv} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in M : (xRy \text{ und } yRz \Rightarrow xRz)$$

$$\text{symmetrisch} \Leftrightarrow \forall x, y \in M : xRy \Rightarrow yRx$$

$$\text{antisymmetrisch} \Leftrightarrow \forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y).$$

Bemerkung:

Stellt man sich eine Relation R auf M durch Pfeile dargestellt vor (vgl. Beispiel 3) so gilt:

- R ist reflexiv \Leftrightarrow zu jedem Element gibt es einen Pfeil zu sich selbst.

In Beispiel 3 gibt es nur für 2 einen Pfeil zu sich selbst; also ist R nicht reflexiv.

- R ist transitiv \Leftrightarrow immer wenn es zwei Pfeile hintereinander gibt, so gibt es auch einen direkten Pfeil.

In Beispiel 3 ist dies erfüllt: Es gibt Pfeile $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ und auch direkt $1 \rightarrow 4$ und Pfeile $2 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ und direkt $2 \rightarrow 4$. Weitere Pfeilketten gibt es nicht.

- R ist symmetrisch \Leftrightarrow zu jedem Pfeil gibt es den umgekehrten Pfeil.

In Beispiel 3 ist dies für keinen Pfeil außer $2 \rightarrow 2$ erfüllt; also ist R nicht transitiv.

- R ist antisymmetrisch \Leftrightarrow gibt es einen Hin- und einen Rückpfeil, so sind die entsprechenden Elemente gleich.

Anders ausgedrückt: Zwischen zwei verschiedenen Elementen kann es nicht Hin- und Rückpfeil geben.

In Beispiel 3 ist dies erfüllt.

Beispiel 4:

Auf \mathbb{R} ist die Relation „ \leq “ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, aber nicht symmetrisch.

Definition 5.6

Eine Relation auf M heißt *Äquivalenzrelation* $:\Leftrightarrow$ sie ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

Beispiel 5:

1. Auf der Menge aller Menschen ist die Relation R , definiert durch

$$m_1 R m_2 \quad :\Leftrightarrow \quad m_1 \text{ und } m_2 \text{ haben den gleichen Arbeitgeber,}$$

eine Äquivalenzrelation.

2. Sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Auf M wird eine Relation R definiert durch

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

also z.B. $(3, 2) R (6, 4)$ (da $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$) oder $(-3, 2) R (30, -20)$ (da $\frac{-3}{2} = \frac{30}{-20}$).

R ist eine Äquivalenzrelation.

Bemerkungen:

1. Eine Äquivalenzrelation verallgemeinert den Begriff der Gleichheit.
2. Ist R eine Äquivalenzrelation auf M , so kann man M in Klassen zerlegen:

Zu $m \in M$ heißt $[m] := \{x \in M \mid x R m\}$ *Äquivalenzklasse*.

Definition 5.7

Eine Relation auf M heißt *Ordnungsrelation* $:\Leftrightarrow$ sie ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Beispiel 6:

Sei M die Potenzmenge von \mathbb{N} : $M = \{X \mid X \subseteq \mathbb{N}\}$. Dann ist die Teilmengenbeziehung „ \subseteq “ eine Ordnungsrelation auf M :

- $\forall X \subseteq \mathbb{N} : X \subseteq X,$
- $\forall X, Y, Z \subseteq \mathbb{N} : X \subseteq Y \text{ und } Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z,$
- $\forall X, Y \subseteq \mathbb{N} : X \subseteq Y \text{ und } Y \subseteq X \Rightarrow X = Y.$

Es gibt $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, die nicht vergleichbar sind, z.B. $X = \{1, 3\}$ und $Y = \{1, 4\}$.

Definition 5.8

Ist R eine Ordnungsrelation auf M , so heißt dies auch *Teilordnung*. Gilt zusätzlich für alle $x, y \in M$, dass xRy oder yRx , so heißt R (*totale*) *Ordnung*.

Bemerkung:

Totale Ordnungen spielen beim Sortieren eine wichtige Rolle.

Analog zu Funktionen kann man Relationen verketteten:

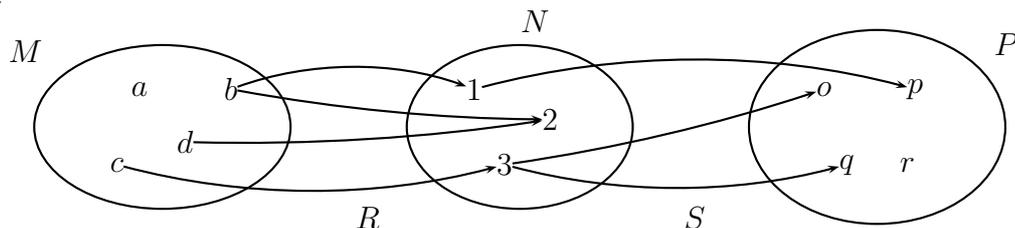
Definition 5.9

Seien $R \subseteq M \times N$ und $S \subseteq N \times P$ Relationen. Dann ist

$$S \circ R := \{(m, p) | m \in M, p \in P \text{ und } \exists n \in N : mRn \text{ und } nSp\}$$

die Verkettung von R und S .

Beispiel 7:



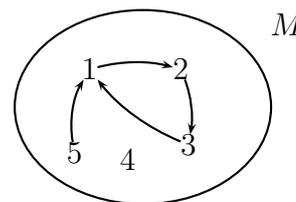
Es ist $S \circ R = \{(b, p), (c, o), (c, q)\}$.

Beispiel 8:

Seien $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (5, 1)\}$.

Dann ist $R \circ R = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (5, 2)\}$.

(Man muss sich jeweils immer zwei Pfeile „entlanghangeln“.)



Bemerkung:

Die Schreibweise (Reihenfolge) $S \circ R$ lehnt sich an die Schreibweise der Verkettung von Funktionen an.

Statt $R \circ R$ schreibt man auch R^2 , entsprechend $R^3 = R^2 \circ R, \dots$

Definition 5.10

Sei R eine Relation auf M . Der *transitive Abschluss* R^+ von R ist die „kleinste“ transitive Relation, die R enthält.

Beispiel 9:

Zu R aus Beispiel 8 ist

$$R^+ = \{(1, 2), (1, 3), (1, 1)(2, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)(5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Satz 5.11

Sei R eine Relation auf M . Dann ist

$$\begin{aligned} R^+ &= \{(p, q) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_0, \dots, x_n \in M : p = x_0, x_n = q \text{ und} \\ &\quad x_i R x_{i+1} \text{ f\"ur } i = 0, \dots, n-1\} \\ &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. R^+ enthält also die Paare (p, q) , bei denen es einen „Weg“ von p nach q gibt.
2. Manchmal betrachtet man auch den *reflexiv-transitiven Abschluss* R^* , die „kleinste“ transitive und reflexive Relation, die R enthält. Es ist

$$R^* = R^+ \cup \{(m, m) \mid m \in M\}.$$

3. Statt Abschluss spricht man auch von *Hülle* (transitive Hülle von R , reflexiv-transitive Hülle von R).

Bemerkungen:

1. Sei $M = \mathbb{N}$. Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage und

$$mRn \Leftrightarrow \text{aus } A(m) \text{ folgt } A(n).$$

Dann gelten auch alle Folgerungen im transitiven Abschluss R^+ .

Beispiel 10:

Bei $R = \{(1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 10)\}$, also

$$A(1) \Rightarrow A(3), \quad A(3) \Rightarrow A(5), \quad A(3) \Rightarrow A(7), \quad A(5) \Rightarrow A(10).$$

Dann gilt auch

$$A(1) \Rightarrow A(5), \quad A(1) \Rightarrow A(7), \quad A(1) \Rightarrow A(10), \quad A(3) \Rightarrow A(10),$$

d.h., man hat Folgerungen für alle Paare aus R^+ .

Hat man die Aussage $A(m_0)$ für ein m_0 gezeigt, so gilt A auch für alle n mit $m_0 R^+ n$.

Beispiel 11:

Bei der vollständigen Induktion zeigt man $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (Induktionsschritt), hat also $nR(n+1)$. Der transitive Abschluss ist dann

$$R^+ = \{(m, n) | m < n\}.$$

Insbesondere gilt $1R^+n$ für jedes n . Wenn man nun noch zeigt, dass $A(1)$ gilt (Induktionsanfang), so gilt $A(n)$ für alle n .

2. Sei Σ die Menge von Buchstaben und Σ^* die Menge aller daraus bildbaren Worte.

Man kann nun eine Teilmenge von gültigen Worten dadurch definieren, dass man bestimmte Worte als gültig deklariert und Ableitungsregeln definiert.

Beispiel 12:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$, also z.B. „aababbba“, „bbbaab“ $\in \Sigma^*$.

Gültige Worte seien „a“, „b“ und das leere Wort „“, und, falls w ein gültiges Wort ist, so sollen auch awa und bwb gültige Worte sein.

Damit erhält man als gültige Worte genau die Palindrome (vorwärts wie rückwärts gelesen gleiche Worte), z.B. „aaabaaa“ oder „aabaabbaabaa“.

Dies kann man durch den transitiven Abschluss ausdrücken:

Durch die Ableitungsregeln legt man eine Relation R fest (im Beispiel 12 z.B. „aba“ R „aaba“ und „aba“ R „babab“). Sämtliche mögliche Ableitungen, ggf. über mehrere Schritte, erhält man dann durch den reflexiv-transitiven Abschluss R^* . Legt man nun noch eine Ausgangsmenge Σ_0^* von gültigen Worten fest, erhält man

$$\text{Menge der gültige Worte} = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_0 \in \Sigma_0^* : w_0 R^* w\}.$$

Beispiel 13 (Fortsetzung von Beispiel 12):

Die Palindrome werden durch folgende Relation R festgelegt:

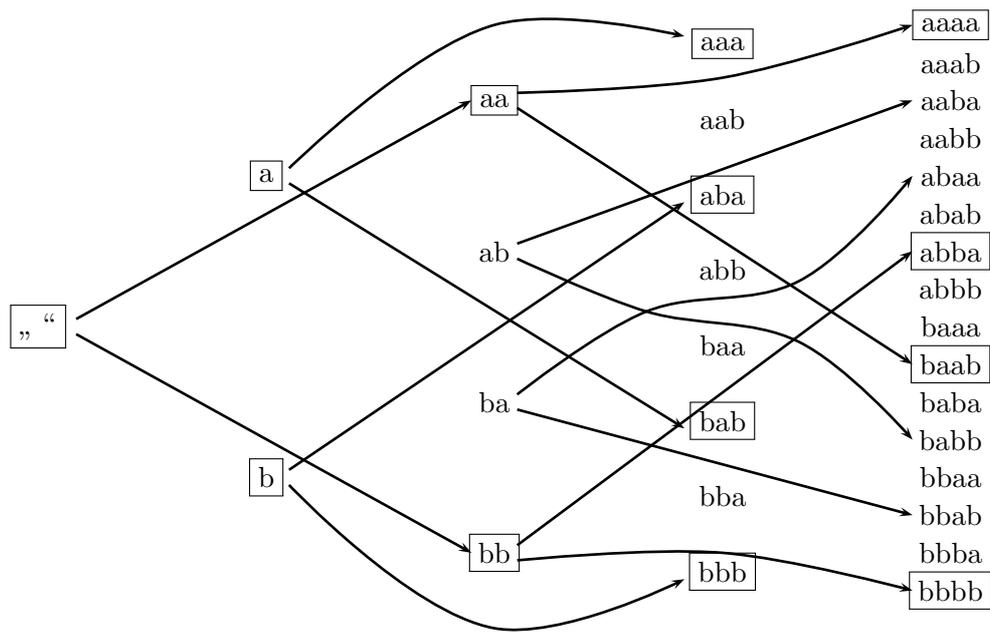
Ein Wort $w \in \{a, b\}^*$ stehe in Relation zu awa und bwb , also

$$w R awa \quad \text{und} \quad w R bwb.$$

Als Ausgangsmenge von gültigen Worten setzt man $\Sigma_0^* = \{„“, „a“, „b“\}$.

Damit ist $\{w \in \Sigma^* \mid \exists w_0 \in \Sigma_0^* : w_0 R^* w\}$ genau die Menge der Palindrome.

Im folgenden Bild sind die Worte aus Σ^* mit weniger als fünf Buchstaben aufgelistet. Die Relation R ist mit Pfeilen gekennzeichnet und die gültigen Worte sind umrandet.



Literatur: [Walz] 1.3; [Stingl] 1.3; [Brill] 4.1, 4.2, 4.3; [Hart] 1.2

A. Ergänzungen zu Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Lösungsverfahren für spezielle Klassen von Differenzialgleichungen vorgestellt.

A.1. Trennung der Variablen

Bei Differenzialgleichungen der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ kann man die Variablen trennen.

Beispiel 1:

$$y' = -x \cdot y \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -x$$

Integration liefert dann

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int_{x_0}^x -s ds.$$

Durch Substitution $t = y(s)$, also $dt = y'(s) ds$, erhält man

$$\begin{aligned} \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{t} dt &= -\frac{1}{2} s^2 \Big|_{x_0}^x \\ \Rightarrow \ln |t| \Big|_{y(x_0)}^{y(x)} &= -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x_0^2 \\ \Rightarrow \ln |y(x)| - \ln |y(x_0)| &= -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x_0^2 \\ \Rightarrow \ln |y(x)| &= -\frac{1}{2} x^2 + \underbrace{\frac{1}{2} x_0^2 + \ln |y(x_0)|}_c \\ \Rightarrow y(x) &= \pm e^{-\frac{1}{2} x^2 + c} = \underbrace{\pm e^c}_d \cdot e^{-\frac{1}{2} x^2} \\ \Rightarrow \text{Lösung: } y(x) &= d \cdot e^{-\frac{1}{2} x^2} \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen bildet die Basis für die folgende **Merkregel** zur Lösung von Differenzialgleichungen der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$:

Allgemein	Beispiel
$y' = f(x) \cdot g(y)$	$y' = -x \cdot y$
a) Schreibe $y' = \frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = -x \cdot y$
b) Trenne x und y	$\frac{dy}{y} = -x \cdot dx$
c) Integriere beide Seiten (beachte eine Integrationskonstante)	$\int \frac{dy}{y} = -\int x dx$ $\ln y = -\frac{1}{2}x^2 + c$
d) Löse nach y auf	$y(x) = \pm e^{-\frac{1}{2}x^2 + c}$
e) Bei gegebener Anfangsbedingung: Anpassung der Integrationskonstante.	z.B. $y(0) = 1$: $1 = y(0) = \pm e^{0+c} \Rightarrow c = 0$ und „+“ \rightarrow Lösung: $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$
f) Test durch Einsetzen	$y(0) = e^{-\frac{1}{2}0^2} = 1 \rightarrow \text{AB} \checkmark$ $y' = -\frac{1}{2} \cdot 2x \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_y = -x \cdot y \checkmark$

Bemerkung:

Die Darstellung einer Lösung mit Parametern (vor der Anpassung von Anfangsbedingungen) nennt man auch *allgemeine Lösung*.

A.2. Homogene lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y' + a(x) \cdot y = 0.$$

Lösung mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + a(x) \cdot y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a(x) \cdot y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \underbrace{-\int a(x) dx}_{=A(x)+c} \\ &\Rightarrow \ln |y| = -(A(x) + c) \Rightarrow |y| = e^{-A(x)-c} \\ &\Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{-c}}_d \cdot e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Test: Ist $y(x) = c e^{-A(x)}$, so folgt $y' = c \cdot e^{-A(x)} \cdot (-a(x))$, also

$$y' + a(x) \cdot y = -c \cdot e^{-A(x)} \cdot a(x) + a(x) \cdot c e^{-A(x)} = 0.$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} y' = -x \cdot y &\Rightarrow y' + xy = 0, \text{ also } a(x) = x \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ &\Rightarrow \text{jede Lösung hat die Form } y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

A.3. Variation der Konstanten

Gegeben sei die inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

$$y' + a(x) \cdot y = f(x).$$

Die homogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung $y' + a(x) \cdot y = 0$ hat die Lösung $y(x) = c \cdot e^{-A(x)}$ mit einer Stammfunktion A zu a .

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung: $c = c(x)$ ist auch von x abhängig:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-A(x)}.$$

Einsetzen ergibt dann

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x) \cdot y(x) &= c'(x) \cdot e^{-A(x)} + \underbrace{c(x) \cdot e^{-A(x)}}_y \cdot (-a(x)) + a(x) \cdot y(x) \\ &= c'(x) \cdot e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichung $y' + a(x) \cdot y = f(x)$ ist also erfüllt, wenn

$$c'(x) \cdot e^{-A(x)} = f(x) \Leftrightarrow c'(x) = f(x) \cdot e^{A(x)} \Leftrightarrow c(x) = \int f(x) \cdot e^{A(x)} dx$$

gilt.

Beispiel 1:

$$y' + x \cdot y = x.$$

Eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + x \cdot y = 0$ ist $y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung: $y(x) = c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} x &= y'(x) + x \cdot y(x) \\ &= c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}(-x) + x \cdot c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ \Rightarrow c'(x) &= x e^{+\frac{1}{2}x^2} \\ \Rightarrow c(x) &= e^{+\frac{1}{2}x^2} + c \end{aligned}$$

Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung sind dann:

$$y(x) = \left(e^{\frac{1}{2}x^2} + c \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underbrace{1}_{\text{spez. Lsg. der inhom. DGL}} + \underbrace{c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{\text{allg. Lsg. der hom. DGL}}.$$

B. Ergänzungen zur Fouriertheorie, Faltung und Dirac-Funktion

B.1. Fourierreihe im Vektorraum

Sei V der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx \quad (f, g \in V)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

Die Integralbeziehungen zwischen $\sin(nx)$, $\sin(mx)$, $\cos(nx)$ und $\cos(mx)$ besagen, dass (bzgl. dieses Skalarprodukts) diese Funktionen orthogonal zueinander sind.

Wie kann man eine gegebene Funktion $f \in V$ möglichst gut (bzgl. des oben definierten Skalarprodukts und dem damit verbundenen Abstands-/Längenbegriff) durch diese Funktionen approximieren, z.B. durch ein $g(x) = c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x)$?

Den kleinsten Abstand zwischen f und g erhält man, wenn der „Verbindungsvektor“ $f - g$ senkrecht auf den „Richtungsvektoren“ $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = \cos(x)$ und $v_3(x) = \sin(x)$ steht, wenn also gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f - g, v_1 \rangle = \int_0^{2\pi} (f(x) - (c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x))) \cdot 1 \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \, dx - c_1 \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

bzw. in Vektor-Schreibweise:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f - g, v_1 \rangle = \langle f, v_1 \rangle - \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, v_1 \rangle \\ &= \langle f, v_1 \rangle - \left(c_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=2\pi} + c_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + c_3 \underbrace{\langle v_3, v_1 \rangle}_{=0} \right) = \langle f, v_1 \rangle - c_1 \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f - g, v_2 \rangle = \int_0^{2\pi} (f(x) - (c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x))) \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \, dx - \int_0^{2\pi} (c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cos(x) \cdot \cos(x) + c_3 \sin(x) \cdot \cos(x)) \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \, dx - c_2 \pi, \end{aligned}$$

bzw. in Vektor-Schreibweise:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (f - g), v_2 \rangle = \langle f, v_2 \rangle - \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, v_2 \rangle \\ &= \langle f, v_2 \rangle - \left(c_1 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{=0} + c_2 \underbrace{\langle v_2, v_2 \rangle}_{=\pi} + c_3 \underbrace{\langle v_3, v_2 \rangle}_{=0} \right) = \langle f, v_2 \rangle - c_2 \cdot \pi, \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (f - g), v_3 \rangle = \langle f, v_3 \rangle - \langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, v_3 \rangle \\ &= \langle f, v_3 \rangle - \left(c_1 \underbrace{\langle v_1, v_3 \rangle}_{=0} + c_2 \underbrace{\langle v_2, v_3 \rangle}_{=0} + c_3 \underbrace{\langle v_3, v_3 \rangle}_{=\pi} \right) = \langle f, v_3 \rangle - c_3 \cdot \pi, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle f, v_1 \rangle, \\ c_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) \, dx = \frac{1}{\langle v_2, v_2 \rangle} \langle f, v_2 \rangle, \\ c_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) \, dx = \frac{1}{\langle v_3, v_3 \rangle} \langle f, v_3 \rangle, \end{aligned}$$

d.h., die optimale Approximation ist genau die (abgeschnittene) Fourierreihe.

Die Fourierreihe einer Funktion f ist also die Darstellung der Funktion bzgl. der „Basisvektoren“ 1 , $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$. Die Fourierkoeffizienten ergeben sich als Skalarprodukt von f mit diesen Basisvektoren.

B.2. Diskrete Fouriertransformation

B.2.1. Nachweis der gelingenden Hin- und Rücktransformation

Seien C bzw. D die Matrizen zur Hin- bzw. Rücktransformation und $w = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ wie in Abschnitt 3.3. Ferner sei e_{mn} das Element in der m -ten Zeile und n -ten Spalte von $D \cdot C$. Dann ist

$$e_{mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{k \cdot m} \cdot w^{-n \cdot k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (w^{m-n})^k.$$

Für $n = m$ ist $w^{m-n} = w^0 = 1$, also $e_{mn} = 1$.

Für $n \neq m$ ist $w^{m-n} \neq 1$ und man erhält als Partialsumme der geometrischen Reihe und wegen $w^N = 1$

$$e_{mn} = \frac{1 - (w^{m-n})^N}{1 - w^{m-n}} = \frac{1 - (w^N)^{m-n}}{1 - w^{m-n}} = \frac{1 - 1}{1 - w^{m-n}} = 0.$$

Also ist $D \cdot C$ die Einheitsmatrix.

B.2.2. Fast-Fourier-Transformation

Die Idee der Fast-Fourier-Transformation ist ein geschicktes Aufteilen in die gerade bzw. ungerade Summanden und der Vergleich der Berechnungen zu c_n und $c_{n+N/2}$.

Sei $N = 2M$. Eine Aufteilung der Summation bei der Berechnung von c_n in die gerade bzw. ungerade Summanden führt zu

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} \cdot e^{-jn\frac{2\pi}{N}} + \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} \cdot e^{-jn\frac{2\pi \cdot (2j+1)}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \cdot \left(\sum_{j=0}^{2M/2-1} f_{2j} \cdot e^{-jn\frac{2\pi \cdot 2j}{2M}} + \sum_{j=0}^{2M/2-1} f_{2j+1} \cdot e^{-jn\frac{2\pi \cdot (2j+1)}{2M}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j} \cdot e^{-jn\frac{2\pi \cdot j}{M}}}_{=: c_{g,n}} + e^{-jn\frac{2\pi}{N}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} f_{2j+1} \cdot e^{-jn\frac{2\pi \cdot j}{M}}}_{=: c_{u,n}} \right). \end{aligned}$$

Dabei sind $c_{g,n}$ bzw. $c_{u,n}$ die Fouriertransformierten der geraden bzw. ungeraden Datenpunkte f_{2j} bzw. f_{2j+1} ($j = 0, \dots, M$).

Die e-Faktoren bei der Berechnung von $c_{g,n}$ und $c_{g,n+M}$ bzw. $c_{u,n}$ und $c_{u,n+M}$ sind gleich, denn

$$e^{-j(n+M)\frac{2\pi}{M}j} = e^{-jn\frac{2\pi}{M}j} \cdot e^{-jM\frac{2\pi}{M}j} = e^{-jn\frac{2\pi}{M}j} \cdot e^{-j\cdot 2\pi} = e^{-jn\frac{2\pi}{M}j}$$

Man braucht also nur $c_{g,m}$ bzw. $c_{u,m}$ für $m = 0, \dots, M-1$ berechnen und kann damit alle c_n , $n = 0, \dots, N-1$ berechnen durch

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (c_{g,m} + e^{-jm\frac{2\pi}{N}} c_{u,m}), \quad c_{m+M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (c_{g,m} + e^{-j(m+M)\frac{2\pi}{N}} c_{u,m}).$$

Der Aufwand bei N Datenpunkten entspricht also der Berechnung von zwei Fouriertransformationen mit je $\frac{N}{2}$ Datenpunkten und anschließend einem linearen Aufwand zur Berechnung der tatsächlichen Koeffizienten.

Führt man dies rekursiv fort, erhält bei $N = 2^k$ also einen Aufwand von

$$O\left(N + 2 \cdot \left(\frac{N}{2} + 2 \cdot \left(\frac{N}{4} + 2 \cdot \left(\dots + 2 \cdot (1) \dots\right)\right)\right)\right) = O(N \cdot k) = O(N \log N).$$

Bemerkung:

Auch der mittlere Faktor transformiert sich „schön“:

$$e^{-j(m+M)\frac{2\pi}{N}} = e^{-jm\frac{2\pi}{N}} \cdot e^{-jM\frac{2\pi}{2M}} = e^{-jm\frac{2\pi}{N}} \cdot e^{-j\cdot\pi} = -e^{-jm\frac{2\pi}{N}}.$$

Also ist

$$c_{m+M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (c_{g,m} - e^{-jm\frac{2\pi}{N}} c_{u,m}).$$

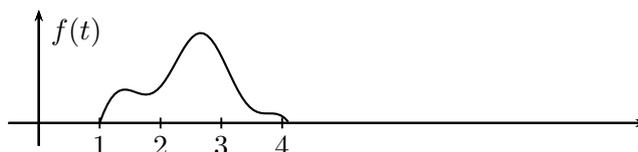
In der Matrix C (und auch D) entsprechen sich also die Zeilen m und $m+M$: Die Einträge in den geraden Spalten sind gleich, die in den ungeraden mit umgekehrtem Vorzeichen.

B.3. Die Faltung

Viele technische Prozesse stellen eine Überlagerung dar, z.B. das Empfangssignal $g(t)$ bei einem gesendeten Signal $f(t)$ und einer Impulsantwort $h(t)$.

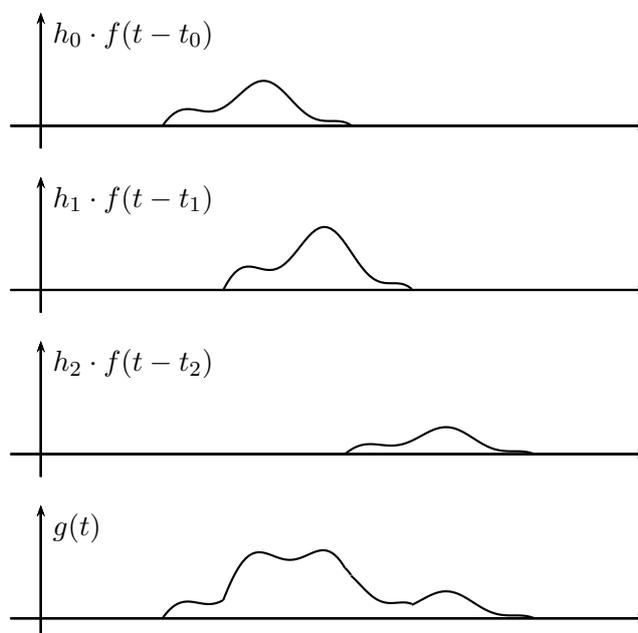
Beispiel 1:

Bei einem Echo an drei verschiedenen Orten und den damit verbundenen unterschiedlichen Laufzeiten t_0, t_1, t_2 und Dämpfungen h_0, h_1, h_2 ergibt sich bei einem Eingangssignal $f(t)$ der Form



das Empfangssignal durch

$$g(t) = h_0 \cdot f(t - t_0) + h_1 \cdot f(t - t_1) + h_2 \cdot f(t - t_2).$$



Man kann g (auch bei noch mehr „Echos“) darstellen als

$$g(t) = \sum h(t_k) \cdot f(t - t_k).$$

In einer kontinuierlichen Modellierung ist

$$g(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau.$$

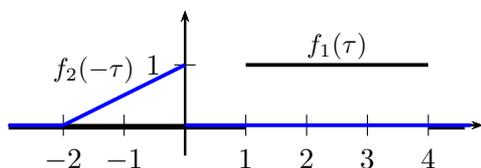
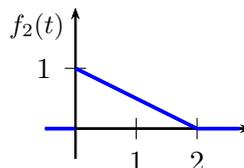
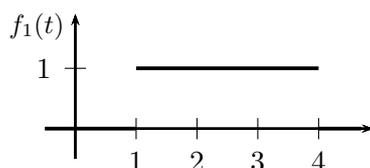
Definition B.1

Die Funktion

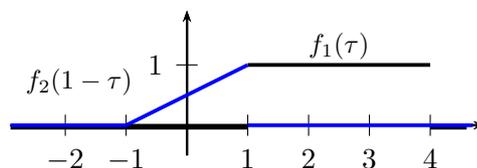
$$f_1 * f_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

heißt *Faltung* von f_1 und f_2 .

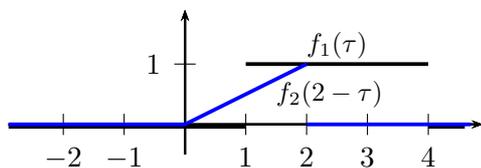
Die Faltung kann man sich auch verbildlichen als ein Aneinander-Vorbeischieben von f_1 und (dem gespiegelten) f_2 :

Beispiel 2:

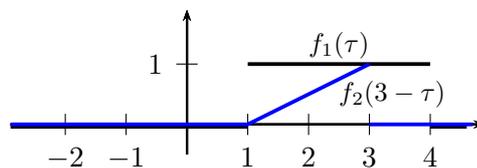
$$f_1 * f_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(0 - \tau) d\tau = 0$$



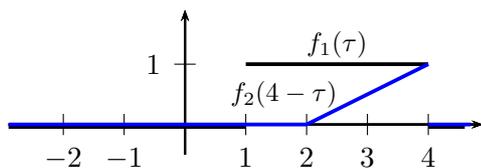
$$f_1 * f_2(1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(1 - \tau) d\tau = 0$$



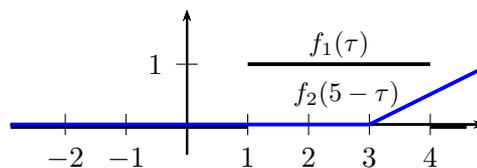
$$f_1 * f_2(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(2 - \tau) d\tau = 0.75$$



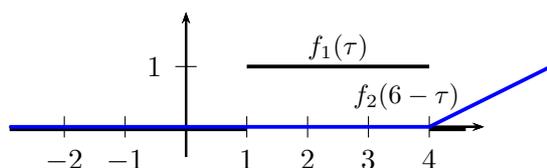
$$f_1 * f_2(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(3 - \tau) d\tau = 1$$



$$f_1 * f_2(4) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(4 - \tau) d\tau = 1$$

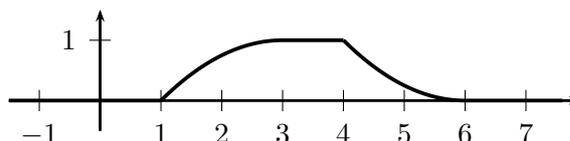


$$f_1 * f_2(5) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(5 - \tau) d\tau = 0.25$$



$$f_1 * f_2(6) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(6 - \tau) d\tau = 0$$

Man erhält damit folgenden Verlauf von $f_1 * f_2$:

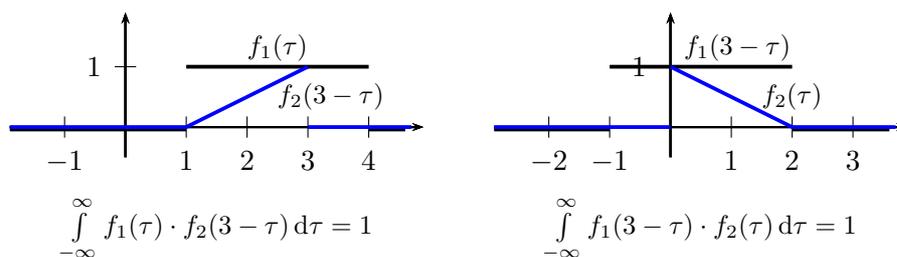


Satz B.2

Die Faltung ist kommutativ, d.h., es gilt $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

Bemerkung:

Stellt man sich die Faltung wie oben durch Übereinanderverschieben von f_1 und dem gespiegelten und verschobenen f_2 vor, so ist Satz B.2 verständlich, denn man erhält die gleiche Fläche, wenn man statt f_2 die Funktion f_1 spiegelt und verschiebt:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(3 - \tau) d\tau = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(3 - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau = 1$$

Rechnerisch gilt

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(t) &= \int_{t-\tau=x}^{-\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{-\infty} f_1(t - x) \cdot f_2(x) (-dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \cdot f_1(t - x) dx = f_2 * f_1(t). \end{aligned}$$

Bemerkung:

Faltungs-Gleichungen kann man mit Hilfe der Laplace-Transformation lösen.

Beispiel 3:

Gesucht ist eine Funktion $f(t)$ mit

$$f(t) * (\cos t) = t.$$

(Dabei werden die \cos -Funktion und die rechte Seite nur für $t > 0$ betrachtet und für $t \leq 0$ als Null angesehen.)

Eine Transformation in den Laplace-Bereich führt mit

$$f \circ \bullet F, \quad \cos t \circ \bullet \frac{s}{s^2 + 1}, \quad t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$$

und, da eine Faltung zu einer Multiplikation wird, zu

$$F(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

Zurück transformiert ergibt sich als Lösung

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Bemerkung:

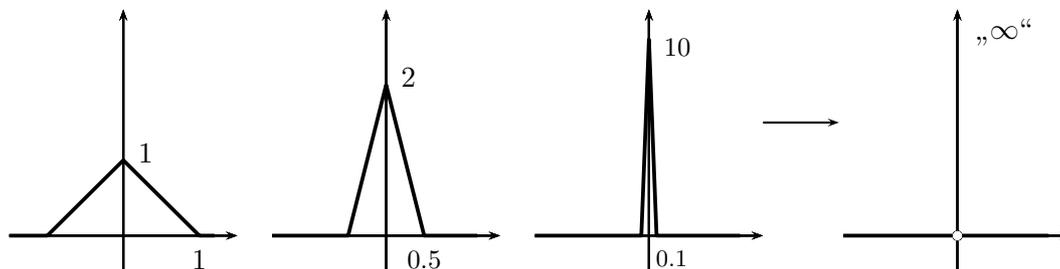
Eng verwandt mit der Faltung ist die *Kreuzkorrelationsfunktion*

$$\kappa(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t + \tau) d\tau.$$

Bei $f = f_1 = f_2$ nennt man dies auch *Autokorrelationsfunktion*.

B.4. Die Diracsche- δ -Funktion

Die Diracsche- δ -Funktion soll Vorgänge wie einen Schlag oder einen kurzen heftigen Impuls modellieren. Man kann sie sich als Grenzwert von Funktionen vorstellen:



Definition B.3

Die Diracsche- δ -Funktion hat „überall den Wert 0 außer bei $t = 0$, wo sie so unendlich ist, dass ihr Integral 1 ergibt“: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Eine solche Funktion existiert nicht im klassischen Sinn. Die Mathematik erlaubt im Kontext der sogenannten Distributionentheorie eine exakte Definition. Man sagt daher auch (richtiger) *Diracsche- δ -Distribution*. Aber auch ohne die entsprechende Theorie lässt sich mit der Diracschen- δ -Funktion anständig rechnen. Wichtig ist dabei, dass die δ -Funktion eigentlich nur im Zusammenhang mit Integralen einen Sinn macht, wo die Eigenschaft $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ genutzt wird.

Satz B.4

1. Die δ -Funktion ist eine gerade Funktion: $\delta(t) = \delta(-t)$.
2. Für eine stetige Funktion gilt

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0).$$

3. Für die verschobene Delta-Funktion $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ gilt

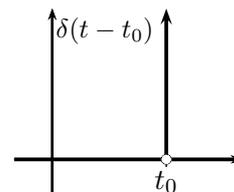
$$f(t) \cdot \delta_{t_0}(t) = f(t_0) \cdot \delta_{t_0}(t)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) dt = f(t_0).$$

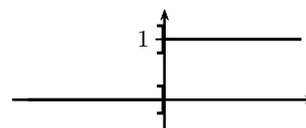
Bemerkungen:

1. Dass die δ -Funktion gerade ist, ist als Grenzwert der geraden Spitzenfunktionen plausibel.
2. Satz B.4.2., ist verständlich, wenn man sich $\delta(t)$ als Grenzwert von „Spitzen“ wie im Bild S. 83 vorstellt: Da f stetig ist, hat f in der Nähe von 0 Werte, die ungefähr gleich $f(0)$ sind. $f(t) \cdot \delta(t)$ ergibt sich daher als Grenzwert von Spitzen, die jeweils mit „ungefähr $f(0)$ “ multipliziert werden. Es ergibt sich eine „Funktion“, die überall den Wert 0 hat außer bei $t = 0$, wo sie „ $f(0)$ -unendlich“ ist, so dass ihr Integral gleich $f(0)$ ist: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$.
3. Bei $\delta(t - t_0)$ ist die „Spitze“ verschoben und liegt nun bei t_0 , so dass bei $f(t) \cdot \delta(t - t_0)$ der Wert von f an der Stelle $t - t_0$ „herausgefiltert“ wird.

**Bemerkung:**

Die δ -Funktion kann man auch als Ableitung der Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0, \\ 0, & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$



ansetzen in dem Sinn, dass man H aus δ durch Integration wieder zurück erhält:

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

Bemerkung (Dirac-Funktion und Faltung):

Für die Faltung von δ mit einer stetigen Funktion f gilt

$$f * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(t - \tau) dt \stackrel{\delta \text{ gerade}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \delta(\tau - t) dt = f(t).$$

Die Faltung mit der verschobenen Delta-Funktion $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ greift entsprechend auf die verschobene Stelle $t - t_0$ zu:

Satz B.5

1. Für die Faltung von δ mit einer stetigen Funktion f gilt $f * \delta(t) = f(t)$.
2. Für die Faltung der um t_0 verschobenen Delta-Funktion $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$ mit einer stetigen Funktion f gilt $f * \delta_{t_0}(t) = f(t - t_0)$.

Beispiel 1:

Die Überlagerung der Echos in Beispiel 1, Abschnitt B.3 (Seite 79), kann man beschreiben als Faltung von f mit

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0\delta(t-t_0) + h_1\delta(t-t_1) + h_2\delta(t-t_2) \\ &= h_0\delta_{t_0}(t) + h_1\delta_{t_1}(t) + h_2\delta_{t_2}(t), \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} f * h(t) &= f * (h_0\delta_{t_0} + h_1\delta_{t_1} + h_2\delta_{t_2})(t) \\ &= f * (h_0\delta_{t_0})(t) + f * (h_1\delta_{t_1})(t) + f * (h_2\delta_{t_2})(t) \\ &= h_0 \cdot (f * \delta_{t_0})(t) + h_1 \cdot (f * \delta_{t_1})(t) + h_2 \cdot (f * \delta_{t_2})(t) \\ &= h_0f(t-t_0) + h_1f(t-t_1) + h_2f(t-t_2). \end{aligned}$$

Bemerkung (Dirac-Funktion und Fourier-Transformation):

1. Nach Satz B.4 gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1, \quad \text{also } \mathcal{F}(\delta) \equiv 1.$$

2. Für die inverse Fourier-Transformation gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{j\omega \cdot 0} = \frac{1}{2\pi}, \quad \text{also } \mathcal{F}^{-1}(\delta) = \frac{1}{2\pi}.$$

Damit folgt $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \delta$, also $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$.

Interpretation: Eine konstante Funktion besitzt nur die Frequenz 0.

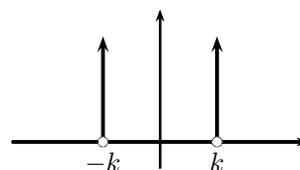
3. Eine Fourier-Reihe kann man als Spezialfall einer Fourier-Transformation mit „Dirac-Stößen“ an Stelle der Fourierkoeffizienten auffassen.

Beispielsweise gehört zur „Frequenz“-Funktion

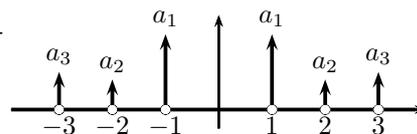
$$G(\omega) = \delta(\omega + k) + \delta(\omega - k) = \delta_{-k}(\omega) + \delta_k(\omega)$$

nach Satz B.4 die „Zeit“-Funktion

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_{-k}(\omega) + \delta_k(\omega)) \cdot e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(e^{-j \cdot (-k) \cdot t} + e^{-j \cdot k \cdot t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\cos(kt) + j \sin(kt) + \cos(-kt) + j \sin(-kt)) \\ &= \frac{1}{\pi} \cos(kt). \end{aligned}$$



Mit entsprechend symmetrisch angelegten „Dirac-Stößen“ kann man also eine Fourierreihe darstellen.



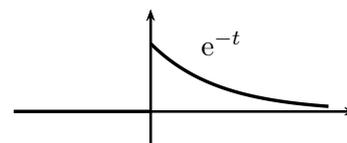
Bemerkung (Dirac-Funktion und Laplace-Transformation):

Für die Laplace-Transformation gilt entsprechend $\mathcal{L}(\delta) \equiv 1$.

Achtung:

Bei Anwendung der Definition erhält man

$$\mathcal{L}(\delta)(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt.$$



Der Wert 1 ist hier als rechtsseitiger Grenzwert von e^{-st} sinnvoll. Als linksseitiger Grenzwert hätte aber auch 0 oder der Mittelwert $\frac{1}{2}$ vorkommen können. Beim Gebrauch der δ -Funktion muss man also vorsichtig sein.

C. Tabelle Standardnormalverteilung

Wahrscheinlichkeitswerte zur Standardnormalverteilung (sog. Verteilungsfunktion)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

x	$\cdot,0$	$\cdot,1$	$\cdot,2$	$\cdot,3$	$\cdot,4$	$\cdot,5$	$\cdot,6$	$\cdot,7$	$\cdot,8$	$\cdot,9$
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Ablesebeispiel:

Der Wert zu $x = 1.96$ steht in der Zeile 1.9 und Spalte $\cdot,6$, also $\Phi(1.96) \approx 0,97500$.

Für $x < 0$ gilt $\Phi(x) = 1 - \Phi(|x|)$.

(In Excel erhält man die Werte durch `STANDNORMVERT(x)`.)

Index

A	
Äquivalenzklasse	64
Äquivalenzrelation	63
allgemeine Lösung	12
Anfangsbedingung	8
Anfangswertproblem	8
antisymmetrisch	63
Arbeit	2
B	
Bernoulli-Experiment	45
Bernoulli-Ungleichung	60
Binomial-Verteilung	48
Binomialkoeffizient	42
C	
charakteristisches Polynom	13
D	
Dämpfungsfaktor	35
Differenzialgleichung	
gewöhnliche	8
lineare	11
partielle	20
Differenzialgleichungssysteme	18
Diracsche- δ -Funktion	77
diskrete Fourier-Transformation	30
Koeffizienten	30
Divergenz	4
E	
Erwartungswert	51, 54
Euler-Verfahren	9, 18
Exponentialverteilung	50
F	
Faltung	28, 74
Flächenintegral	2, 3
Flussdichte	3
Fourier-Transformation	26
diskrete	30
Eigenschaften	28
Fourierkoeffizienten	22
Fourierreihe	22
komplexe Form	24
Fundamentalsystem	12
G	
Gauss	
Integralsatz von	4
geometrische Verteilung	48
Gleichverteilung	50
Gradientenfelder	6
H	
Heun-Verfahren	10
I	
Induktion	
vollständige	59
Integralsatz	
von Stokes	5
von Gauss	4
K	
kartesisches Produkt	62
Kombinatorik	43
Korrespondenz	36
Kraft	2
Kraftfeld	2
L	
Lösung	
allgemeine	12, 69
spezielle	11
Laplace-Experiment	45
Laplace-Transformation	35
M	
Median	57
Mittelwert	51
Monte-Carlo-Simulation	45
N	
Normalverteilung	51

O	
Ordnung (DGL)	11
Ordnungsrelation	64
P	
Pascalsches Dreieck	42
Permutation	44
Polynom	
charakteristisches	13
Potenzialfunktion	6
Q	
Quantoren	61
Quellen	4
R	
Realisierung	54
reflexiv	63
Relation	62
Richtungsfeld	9
Rotation	5
Runge-Kutta-Verfahren	10
S	
Senken	4
Standardabweichung	51, 54
Standardnormalverteilung	51, 81
Stichprobe	57
Stokes	
Integralsatz von	5
symmetrisch	63
T	
transitiv	63
transitiver Abschluss	65
Trennung der Variablen	68
V	
Varianz	54
Variation der Konstanten	70
Vektoranalysis	2
Verteilung	
Binomial-	48
Exponential-	50
geometrische	48
Normal-	51
vollständige Induktion	59
W	
Wahrscheinlichkeitsdichte	49
Wegintegral	2
Wirbelstärke	5
Z	
Zufallsexperiment	45
Zufallsvariable	54
diskrete	54
stetige	54
