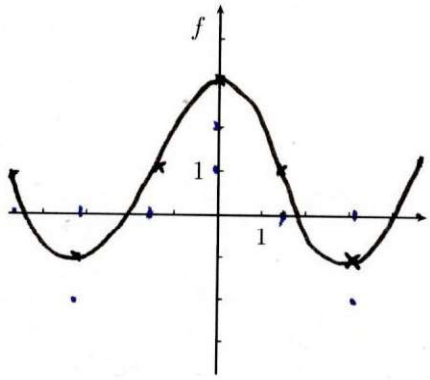
Aufgabe 1 (10 Punkte)

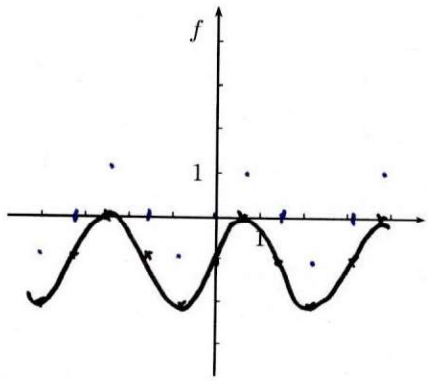
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



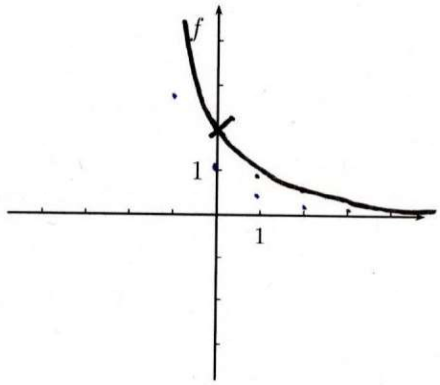
$f(x) = 2 \cdot \cos(x) + 1$

b)



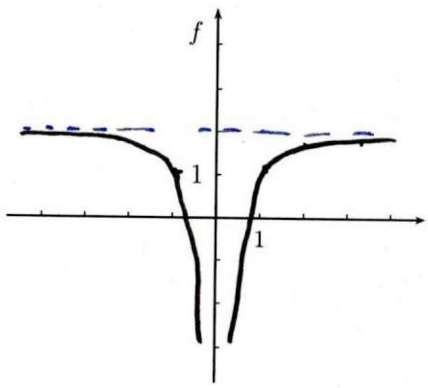
$f(x) = \sin(2x) - 1$

c)



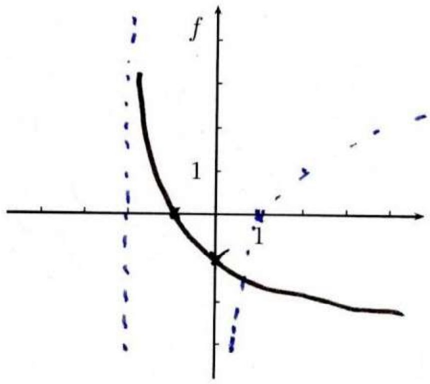
$f(x) = 2 \cdot e^{-x}$

d)



$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

e)



$f(x) = -\log_2(x+2)$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es sei

$$f(x) = \frac{-x-5}{x^2+x-2}.$$

Geben Sie die Partialbruchzerlegung zu f an und skizzieren Sie grob den Funktionsgraf.

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$ oder $x = -2$

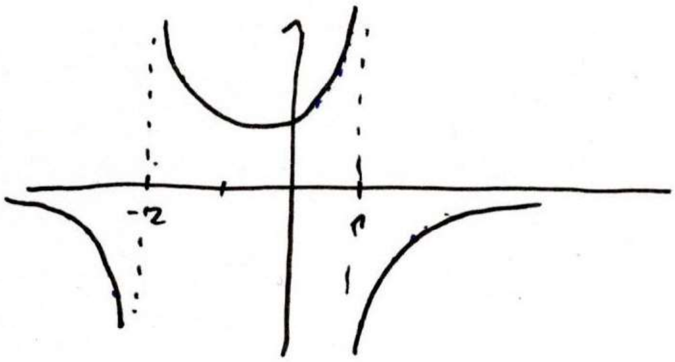
$$\Rightarrow \frac{\boxed{-x-5}}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{\boxed{A(x+2) + B(x-1)}}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Einsetzen von $x = 1$ in $\boxed{}$: $-6 = A \cdot 3 \Rightarrow A = -2$

" " $x = -2$ " " : $-3 = B \cdot (-3) \Rightarrow B = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$



Aufgabe 3 (4 + 4 = 8 Punkte)

Geben Sie Werte $x \in \mathbb{R}$ an, für die die jeweilige Gleichung erfüllt ist.

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^x \;=\; 4.$

b) $\log_2(8x) + \log_2 x \;=\; 1.$

a) Mit $z = e^x$ ist:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad z = -1 \quad \text{oder} \quad z = 4$

$\Leftrightarrow \quad e^x = -1 \quad \text{oder} \quad e^x = 4$

$\quad\quad\quad \lightning$

$\Leftrightarrow \quad\quad\quad\quad\quad\quad x = \ln 4$

b) $\log_2(8x) + \log_2 x = 1$

$\Leftrightarrow \log_2 8 + \log_2 x + \log_2 x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 3 + 2 \cdot \log_2 x = 1$

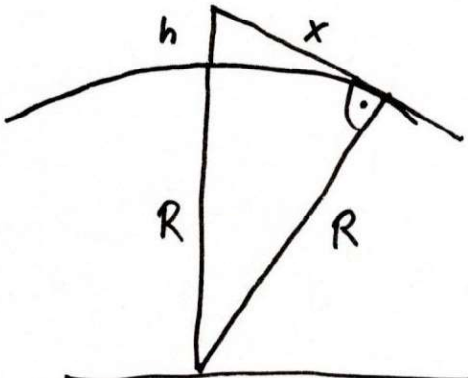
$\Leftrightarrow \quad \log_2 x = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4 $(6 + 4 = 10$ Punkte)

a) Stellen Sie eine Formel auf, wie weit die Horizont-Linie auf Grund der Erdkrümmung entfernt ist, wenn man auf einem Turm der Höhe h steht. (Erdradius $R \approx 6370$km).

b) Geben Sie eine grobe Abschätzung des Ergebnisses bei $h = 100$m an. (Das exakte Ergebnis soll innerhalb von $\pm 20\%$ Ihres Ergebnisses liegen.)



$$R^2 + x^2 = (R+h)^2$$
$$= R^2 + 2Rh + h^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2Rh + h^2}$$

b) $x = \sqrt{2 \cdot 6370\,\text{km} \cdot 0{,}1\,\text{km} + (0{,}1\,\text{km})^2}$

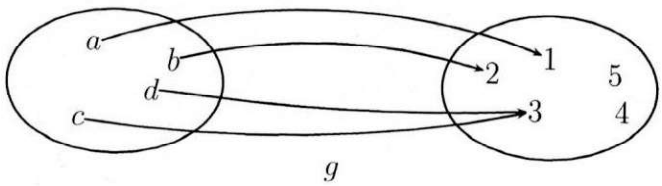
$\approx \sqrt{1274}\,\text{km}$

$\approx 35\,\text{km}$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

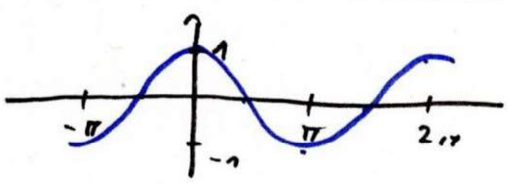
Betrachtet wird zum Einen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

und zum Anderen die skizzierte Abbildung $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Geben Sie jeweils ggf. eingeschränkte Definitions- und Zielbereiche D und Z an, so dass die entsprechenden Funktionen $D \to Z$ die angegebenen Eigenschaften besitzen.

	zu f		zu g	
	D	Z	D	Z
nicht injektiv, nicht surjektiv	$[0;2\pi]$	$\mathbb{R}$	$\{c,d\}$	$\{3;4\}$
injektiv, nicht surjektiv	$[0;\pi]$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$	$\{3;5\}$
nicht injektiv, surjektiv	$[0;2\pi]$	$[-1;1]$	$\{c,d\}$	$\{3\}$
injektiv, surjektiv	$[0;\pi]$	$[-1;1]$	$\{a\}$	$\{1\}$



Aufgabe 6 $(3 + 4 + 5 = 12$ Punkte)

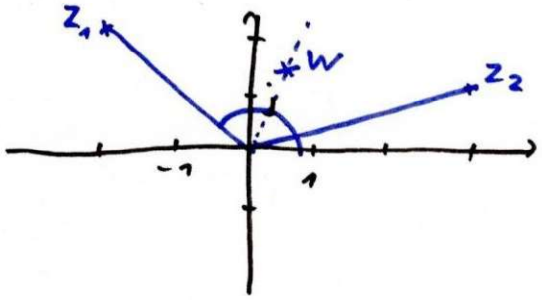
Sei $z_1 = -2 + 2\mathrm{j}$ und $z_2 = 3 + \mathrm{j}$.

a) Skizzieren Sie z_1 und z_2 sowie die ungefähre Lage eines w mit $w^2 = z_1$ in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

c) Geben Sie eine Polardarstellung von z_1 und von ${z_1}^2$ an.

a)



b) $z_1 + z_2 = 1 + 3j$

$z_1 \cdot z_2 = -6 - 2j + 6j - 2 = -8 + 4j$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+2j}{3+j} \cdot \frac{3-j}{3-j} = \frac{-6+2j+6j+2}{3^2+1^2} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}j$$

c) $z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi j}$; ${z_1}^2 = 8\, e^{\frac{3}{2}\pi j}$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $z \in \mathbb{C}$?
(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{j} \cdot z)$	X		
$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(\mathrm{j} \cdot z)$		X	
$\mathrm{Re}(z^*) = \mathrm{Re}(z)$	X		
$\mathrm{Im}(z^*) = \mathrm{Im}(z)$		X	
$\mathrm{Re}(z^2) = (\mathrm{Re}(z))^2$		X	
$z \cdot z^* \in \mathbb{R}$	X		