Aufgabe 1 $(3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung zu den folgenden Funktionen.

Beachten Sie, was jeweils die Variable ist; der Rest sind Parameter.

Vereinfachen Sie (falls möglich) die entstehenden Ausdrücke.

Tipp: Ggf. geht's schneller, wenn man den Funktionsausdruck zunächst umformt.

a) $f(s) = \dfrac{s+1}{(s+b)^2}$

b) $g(y) = \ln(cy^2)$,

c) $h(a) = a^3 \cdot \sqrt{a \cdot \sin a}$,

a) $$f'(s) = \frac{1 \cdot (s+b)^2 - (s+1) \cdot 2 \cdot (s+b)}{((s+b)^2)^2}$$

$$= \frac{(s+b) \cdot [(s+b) - (s+1) \cdot 2]}{(s+b)^4}$$

$$= \frac{s+b-2s-2}{(s+b)^3} = \frac{b-2-s}{(s+b)^3}$$

b) $$g(y) = \ln(c) + 2 \cdot \ln(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 2 \cdot \frac{1}{y}$$

c) $$h(a) = a^3 \cdot a^{0.5} \cdot \sqrt{\sin a} = a^{3,5} \cdot \sqrt{\sin a}$$

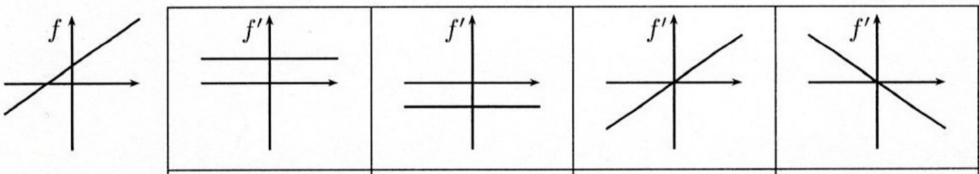
$$\Rightarrow h'(a) = 3{,}5 \cdot a^{2,5} \cdot \sqrt{\sin a} + a^{3,5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin a}} \cdot \cos a$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Welche der rechts skizzierten Funktionen entspricht der Ableitung der links dargestellten Funktion? Kreuzen Sie die richtige Funktion an.

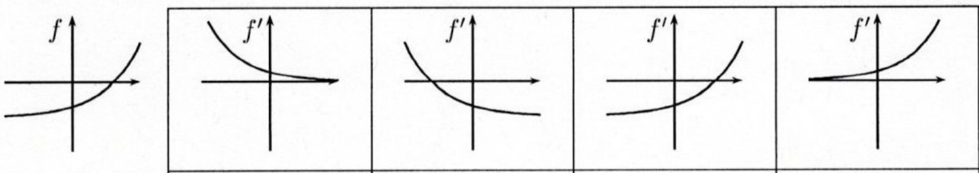
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

a)



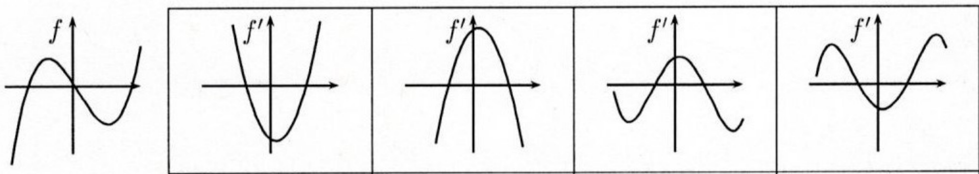
				Ent-hal-tung
X				

b)



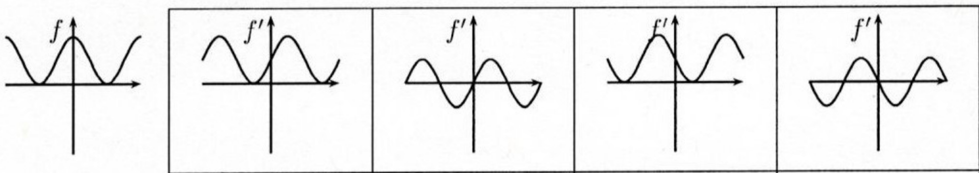
				Ent-hal-tung
			X	

c)



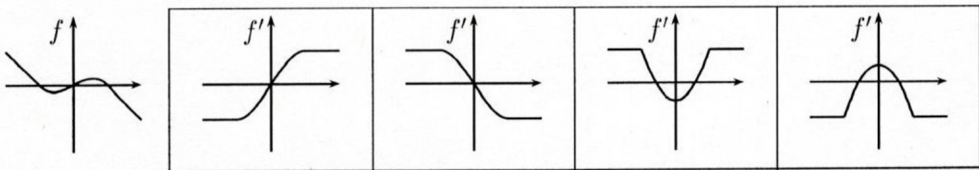
				Ent-hal-tung
X				

d)



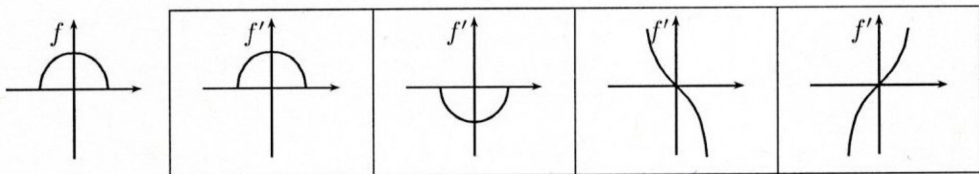
				Ent-hal-tung
			X	

e)



				Ent-hal-tung
			X	

f)



				Ent-hal-tung
		X		

Aufgabe 3 $(2.5 + 2.5 + 3 = 8$ Punkte)

Geben Sie Näherungswerte (als Dezimalzahlen) für die folgenden Werte an, indem Sie geeignete Ableitungen benutzen.

a) $2.1^4 - 2^4$,

b) $\ln 5 - \ln 4.8$,

c) $\sqrt{26}$.

a) Mit $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ ist

$$
\begin{aligned}
2{,}1^4 - 2^4 &= f(2+0{,}1) - f(2) \\
&\approx f'(2) \cdot 0{,}1 \\
&= 4 \cdot 8 \cdot 0{,}1 = 3{,}2
\end{aligned}
$$

b) Mit $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ ist

$$
\begin{aligned}
\ln 5 - \ln 4{,}8 &= f(5) - f(5-0{,}2) \\
&= -\left(f(5-0{,}2) - f(5)\right) \\
&\approx -\, f'(5) \cdot (-0{,}2) \\
&= -\,\frac{1}{5} \cdot (-0{,}2) = 0.2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04
\end{aligned}
$$

c) Mit $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist

$$
\begin{aligned}
\sqrt{26} &= f(25+1) \\
&\approx f(25) + f'(25) \cdot 1 \\
&= 5 + \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot 1 \\
&= 5 + 0.1 \cdot 1 = 5{,}1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Mit Hilfe des Newton-Verfahren soll $\ln 2$ als Lösung von $e^x = 2$ bestimmt werden. Als Startpunkt wird $x_0 = 0$ gewählt.

a) Führen Sie zwei Schritte der Newton-Iteration aus.

b) Zeichnen Sie die Situation inklusive der beiden Newton-Schritte.

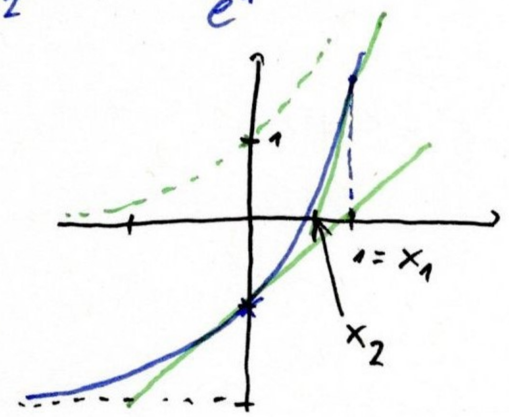
Gesucht: Nst von $f(x) = e^x - 2$

a) allg: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n}-2}{e^{x_n}}$

$$x_1 = 0 - \frac{e^0-2}{e^0} = -\frac{1-2}{1} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{e^1-2}{e^1} = 1-\left(1-\frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

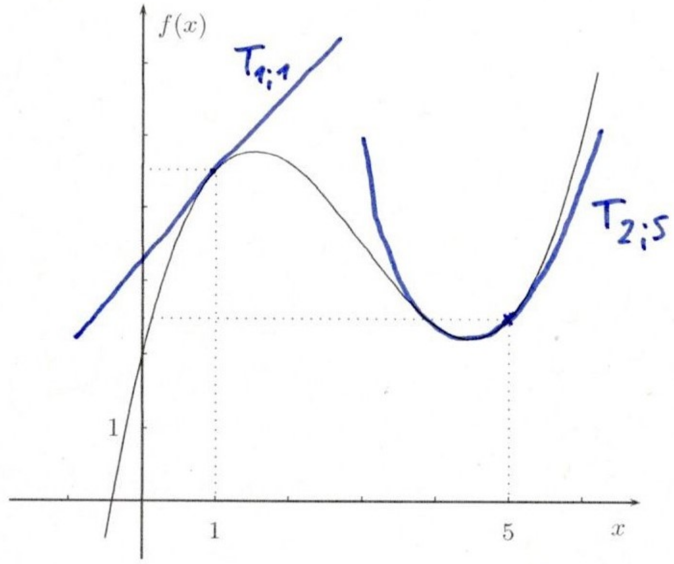
b)



Aufgabe 5 (4 + 4 + 2 = 10 Punkte)

a) Skizzieren Sie in dem Bild zur abgebildeten Funktion f die Lage

1) des ersten Taylorpolynoms $T_{1;1}$ in $x_0 = 1$,
2) des zweiten Taylorpolynoms $T_{2;5}$ in $x_0 = 5$.



b) Geben Sie das zweite Taylorpolynom $T_{2;1}$ an der Stelle $x_0 = 1$ an zu

$$f(x) = x^3 + 2x - 3.$$

c) Geben Sie das dritte Taylorpolynom $T_{3;0}$ an der Stelle $x_0 = 0$ an zu

$$f(x) = x \cdot e^x \quad \text{(Tipp: Potenzreihenentwicklung!)}.$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2 \qquad f''(x) = 6x$

$$\begin{aligned} T_{2;1}(x) &= f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \tfrac{1}{2} f''(1)\cdot(x-1)^2 \\ &= 0 + 5 \cdot (x-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 6 \cdot (x-1)^2 \\ &= 5x - 5 + 3\cdot(x^2 - 2x + 1) \\ &= 3x^2 - x - 2 \end{aligned}$$

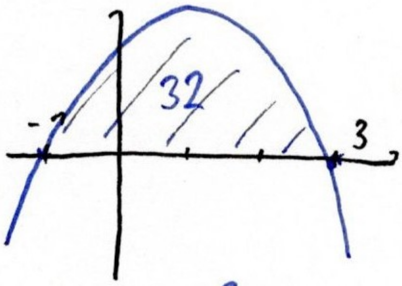
c) PR-Entw: $x \cdot e^x = x \cdot \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \dots\right)$

$\Rightarrow T_{3;0}(x) = x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^3$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Geben Sie eine Parabelgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ an, die die folgenden Bedingungen 1) bis 3) erfüllt:

1) f beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel,
2) f hat die Nullstellen -1 und 3,
3) f schließt mit der x-Achse eine Fläche von 32 ein.



$$f(x) = a\cdot(x+1)(x-3)$$
$$= a\cdot(x^2-3x+x-3)$$
$$= a\cdot(x^2-2x-3)$$

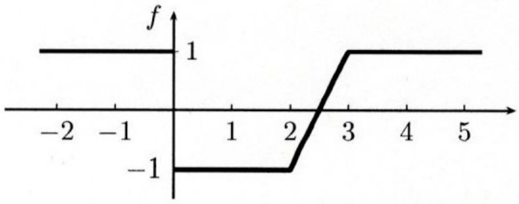
$$32 = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} a\cdot(x^2-2x-3)\,dx$$
$$= a\cdot\left[\left(\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{3}\right]$$
$$= a\cdot\left[(9-9-9)-\left(-\tfrac{1}{3}-1+3\right)\right]$$
$$= a\cdot\left[-9-\tfrac{5}{3}\right]$$
$$= -\frac{32}{3}a$$

$$\Rightarrow a = -3$$
$$\Rightarrow f(x) = -3\cdot(x^2-2x-3)$$
$$= -3x^2+6x+9$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Sei f die nebenstehend abgebildete Funktion.

Geben Sie den Wert der folgenden Integrale an.
(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)



a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$

b) $\displaystyle\int_0^2 (f(x))^2\,\mathrm{d}x = 2$

c) $\displaystyle\int_0^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = -1$

d) $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$

e) $\displaystyle\int_1^3 (f(x)+1)\,\mathrm{d}x = 1$

f) $\displaystyle\int_4^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Aufgabe 8 (6 + 6 = 12 Punkte)

Betrachtet wird $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cdot \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

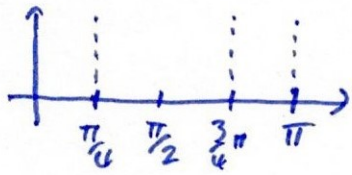
a) Geben Sie einen Näherungswert für das Integral an mittels einer Riemannschen Zwischensumme S mit den Intervall-Zerlegungspunkten

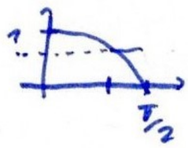
$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_3 = \pi$$

und den Zwischenstellen (an denen der Funktionswert genommen wird)

$$\hat{x_1} = \frac{\pi}{6}, \quad \hat{x_2} = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{x_3} = \pi.$$

b) Berechnen Sie den Integralwert exakt.

a) 



$$S = f(\hat{x}_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\hat{x}_2)\cdot(x_2 - x_1) + f(\hat{x}_3)\cdot(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi\cdot\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\cos(2\pi)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{24}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{\pi^2}{48}$$

b) $$\int_0^{\pi} x\cdot\cos(2x)\,dx = x\,\frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx}_{=0 \text{ wg. Sym.}}$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 - 0$$

$$= 0$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x.$$

(Tipp: Partialbruchzerlegung!)

Es reicht ein Ergebnisterm, in dem noch *ein* „ln“ vorkommt.

Part. bruch-Zerl.: $\frac{2x+1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$

$= \frac{A(x+2) + B}{(x+2)^2}$

koef. für „x“: $2 = A$

$x = -2$ in Zähler: $-3 = B$

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right) dx$$

$$= \left(2\cdot\ln|x+2| + \frac{3}{x+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(2\cdot\ln 3 + \frac{3}{3}\right) - \left(2\cdot\ln 2 + \frac{3}{2}\right)$$

$$= 2\cdot(\ln 3 - \ln 2) + 1 - \frac{3}{2}$$

$$= 2\cdot\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$