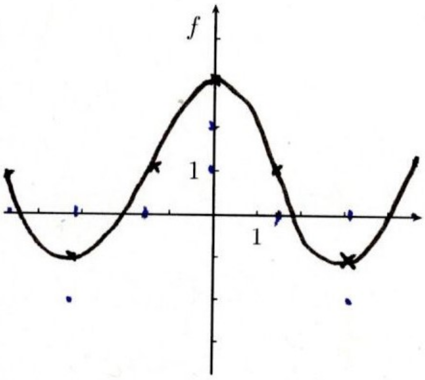
Aufgabe 1 (10 Punkte)

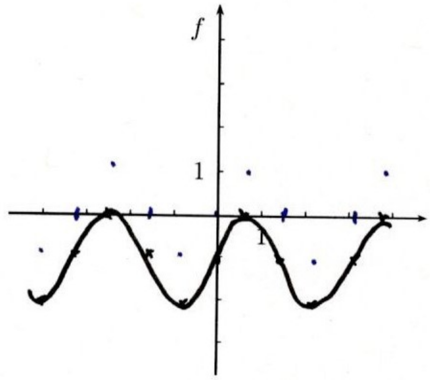
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen jeweils in dem darüber stehenden Koordinatensystem:

a)



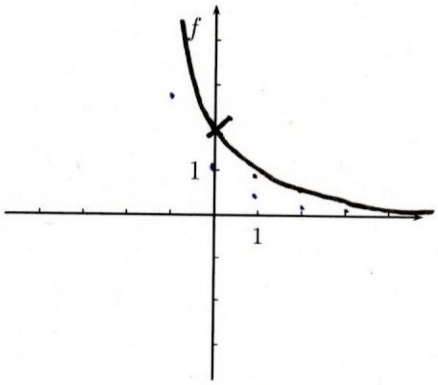
$f(x) = 2 \cdot \cos(x) + 1$

b)



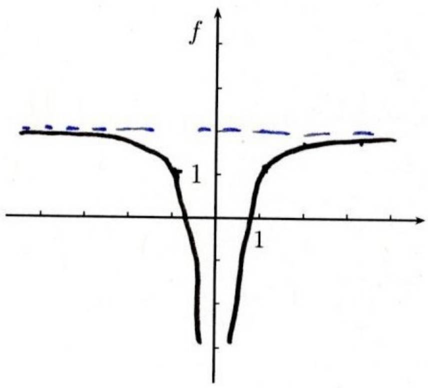
$f(x) = \sin(2x) - 1$

c)



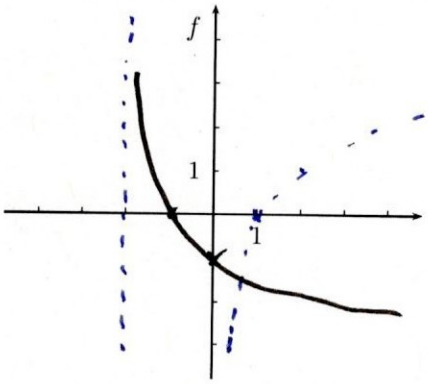
$f(x) = 2 \cdot e^{-x}$

d)



$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

e)



$f(x) = -\log_2(x + 2)$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es sei

$$f(x) = \frac{-x-5}{x^2+x-2}.$$

Geben Sie die Partialbruchzerlegung zu f an und skizzieren Sie grob den Funktionsgraf.

$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1$ oder $x = -2$

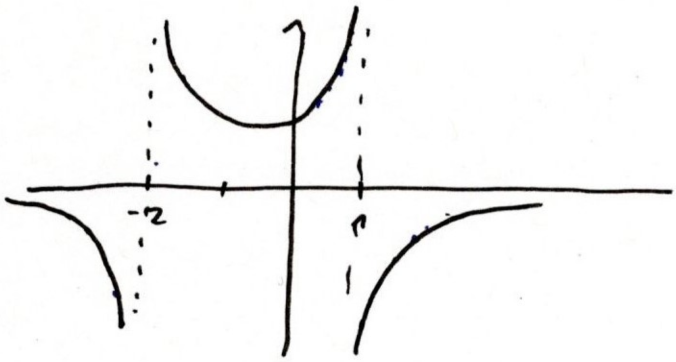
$$\Rightarrow \frac{\boxed{-x-5}}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{\boxed{A(x+2) + B(x-1)}}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Einsetzen von $x = 1$ in $\square$: $-6 = A \cdot 3 \Rightarrow A = -2$

" " $x = -2$ " " : $-3 = B \cdot (-3) \Rightarrow B = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$



Aufgabe 3 $(4+4=8$ Punkte$)$

Geben Sie Werte $x \in \mathbb{R}$ an, für die die jeweilige Gleichung erfüllt ist.

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^{x} \;=\; 4.$

b) $\log_2(8x) + \log_2 x \;=\; 1.$

a) Mit $z = e^x$ ist:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$\Leftrightarrow$ $z = -1$ oder $z = 4$

$\Leftrightarrow$ $e^x = -1$ oder $e^x = 4$

$\lightning$

$\Leftrightarrow$ $x = \ln 4$

b) $\log_2(8x) + \log_2 x = 1$

$\Leftrightarrow$ $\log_2 8 + \log_2 x + \log_2 x = 1$

$\Leftrightarrow$ $3 + 2 \cdot \log_2 x = 1$

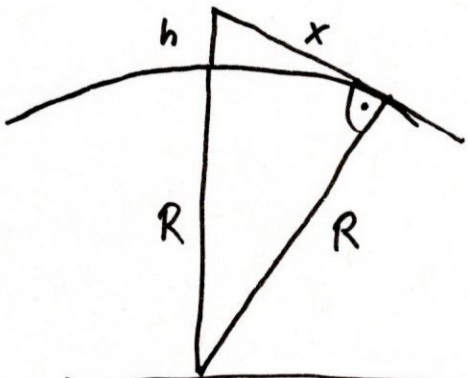
$\Leftrightarrow$ $\log_2 x = -1$

$\Leftrightarrow$ $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4 $(6 + 4 = 10$ Punkte$)$

a) Stellen Sie eine Formel auf, wie weit die Horizont-Linie auf Grund der Erdkrümmung entfernt ist, wenn man auf einem Turm der Höhe h steht. (Erdradius $R \approx 6370$km).

b) Geben Sie eine grobe Abschätzung des Ergebnisses bei $h = 100$m an. (Das exakte Ergebnis soll innerhalb von $\pm 20\%$ Ihres Ergebnisses liegen.)



$$R^2 + x^2 = (R+h)^2$$
$$= R^2 + 2Rh + h^2$$
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2Rh + h^2}$$

b) $x = \sqrt{2 \cdot 6370\,\text{km} \cdot 0{,}1\,\text{km} + (0{,}1\,\text{km})^2}$

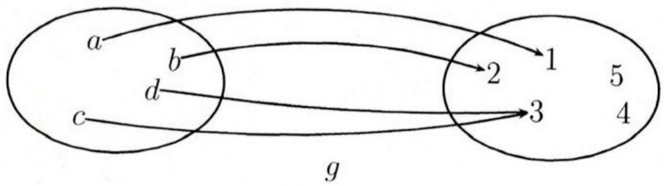
$\approx \sqrt{1274}\ \text{km}$

$\approx 35\ \text{km}$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

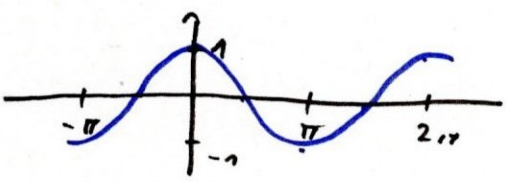
Betrachtet wird zum Einen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

und zum Anderen die skizzierte Abbildung $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Geben Sie jeweils ggf. eingeschränkte Definitions- und Zielbereiche D und Z an, so dass die entsprechenden Funktionen $D \to Z$ die angegebenen Eigenschaften besitzen.

	zu f		zu g	
	D	Z	D	Z
nicht injektiv, nicht surjektiv	$[0;2\pi]$	$\mathbb{R}$	$\{c,d\}$	$\{3;4\}$
injektiv, nicht surjektiv	$[0;\pi]$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$	$\{3;5\}$
nicht injektiv, surjektiv	$[0;2\pi]$	$[-1;1]$	$\{c,d\}$	$\{3\}$
injektiv, surjektiv	$[0;\pi]$	$[-1;1]$	$\{a\}$	$\{1\}$



Aufgabe 6 $(3 + 4 + 5 = 12$ Punkte)

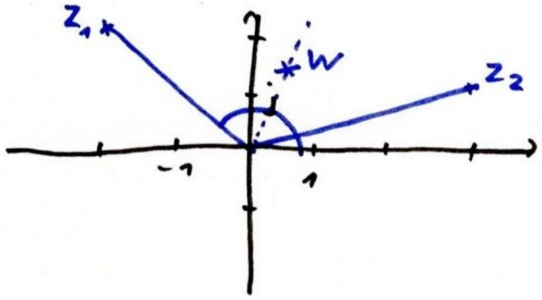
Sei $z_1 = -2 + 2\mathrm{j}$ und $z_2 = 3 + \mathrm{j}$.

a) Skizzieren Sie z_1 und z_2 sowie die ungefähre Lage eines w mit $w^2 = z_1$ in der Gaußschen Zahlenebene.

b) Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$.

c) Geben Sie eine Polardarstellung von z_1 und von ${z_1}^2$ an.

a)



b) $z_1 + z_2 = 1 + 3j$

$z_1 \cdot z_2 = -6 - 2j + 6j - 2 = -8 + 4j$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+2j}{3+j} \cdot \frac{3-j}{3-j} = \frac{-6+2j+6j+2}{3^2+1^2} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}j$

c) $z_1 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{3}{4}\pi j}$; ${z_1}^2 = 8\, e^{\frac{3}{2}\pi j}$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle $z \in \mathbb{C}$?
(Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwortmöglichkeit (2 Punkte) oder „Enthaltung“ (1 Punkt) an.

	gilt	gilt nicht	Enthaltung
$\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{j} \cdot z)$	X		
$\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{j} \cdot z)$		X	
$\mathrm{Re}\,(z^*) = \mathrm{Re}\,(z)$	X		
$\mathrm{Im}\,(z^*) = \mathrm{Im}\,(z)$		X	
$\mathrm{Re}\,(z^2) = (\,\mathrm{Re}\,(z))^2$		X	
$z \cdot z^* \in \mathbb{R}$	X		

Aufgabe 8 $(4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)

Zur Zeit zahlt ein Betrieb einen Monatslohn von 2500€. Nun stehen zwei Tarifverträge zur Auswahl:

Modell 1: Jedes Jahr gibt es 100€ pro Monat mehr als im Vorjahr.

Modell 2: Jedes Jahr gibt es 3% mehr als im Vorjahr.

a) Geben Sie eine Formel für den Monatslohn $M_{n,1}$ bzw. $M_{n,2}$ nach n Jahren bei Modell 1 bzw. Modell 2 an.

b) Geben Sie (ggf. nur formelmäßig) an, nach wieviel Jahren nach einem Tarifabschluss bei den beiden Modellen jeweils das Monatseinkommen über 3000€ liegt.

c) Welches Tarifmodell ist für den Arbeitnehmer auf lange Sicht gesehen besser? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

a) $M_{n,1} = 2500€ + n \cdot 100€$

$M_{n,2} = 2500€\,(1+0{,}03)^n = 1{,}03^n \cdot 2500€$

b) $M_{n,1} > 3000€$

$\Leftrightarrow 2500€ + n \cdot 100€ > 3000€$

$\Leftrightarrow n > 5$

$M_{n,2} > 3000€$

$\Leftrightarrow 1{,}03^n \cdot 2500€ > 3000€$

$\Leftrightarrow 1{,}03^n > \frac{3000}{2500} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

$\Leftrightarrow n > \log_{1{,}03} 6/5$

c) Modell 2 ist besser, da exp. Wachstum stärker ist als lineares Wachstum.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Geben Sie die Grenzwerte (in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) der folgenden Folgen an.

(Sie brauchen Sie Ihre Angaben nicht zu begründen.)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n + 1}{(n+2)\cdot(2n+3)} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)^3}{n\cdot(3n+1)^2} = \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n^2}{n+1} = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{n}}{n+2} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^4} = \infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 3^n}{n^3 + 2^n} = \infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 3^n}{n^4} = -\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 \cdot 0.3^n = 0$