Gitterbasierte Kryptografie

Die gitterbasierte Kryptografie (engl. lattice-based cryptography) wurde erstmals 1996 von Miklós Ajtai, einem ungarischen Informatiker, vorgestellt. Sie beschäftigt sich mit Verfahren, die auf der vermuteten schweren Lösbarkeit gewisser Gitterprobleme beruhen. Diese Verfahren zeichnen sich durch hohe Sicherheit, vergleichsweise effiziente Implementierungen und große Simplizität aus. Zusätzlich wird angenommen, dass sie gegenüber Quantencomputern sicher sind. Bisher ist weder ein klassischer noch ein Quanten-Algorithmus bekannt, der in polynomieller Laufzeit eine Lösung für eines der zugrundeliegenden Gitterprobleme liefern kann. Gitterbasierte Kryptografie findet vor allem Anwendung in asymmetrischen Verschlüsselungen und der Erzeugung digitaler Signaturen.

Gitter

In der Mathematik bezeichnet ein Gitter die Menge von Punkten in einem n-dimensionalen Raum, die eine periodische Struktur aufweisen und sich als ganzzahlige Linearkombination von m linear unabhängigen Vektoren $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$ darstellen lassen. Die Vektoren $b_1, \ldots, b_m$ werden als Basis des Gitters bezeichnet und in der Regel als Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit den Spaltenvektoren $b_1, \ldots, b_m$ zusammengefasst. Das Gitter, welches durch diese Basis generiert wird, ist die Menge der Vektoren

$$\mathcal{L}(B) = \{Bx | x \in \mathbb{Z}^m\}.$$

In anderen Worten: Im n-dimensionalen Raum liegt ein Satz aus m Vektoren vor, die in verschiedene Richtungen zeigen. Jeder Punkt, den man erreichen kann, indem man diese Vektoren in ihrer ursprünglichen oder in entgegengesetzter Richtung beliebig oft aneinanderreiht, gehört zu dem Gitter.

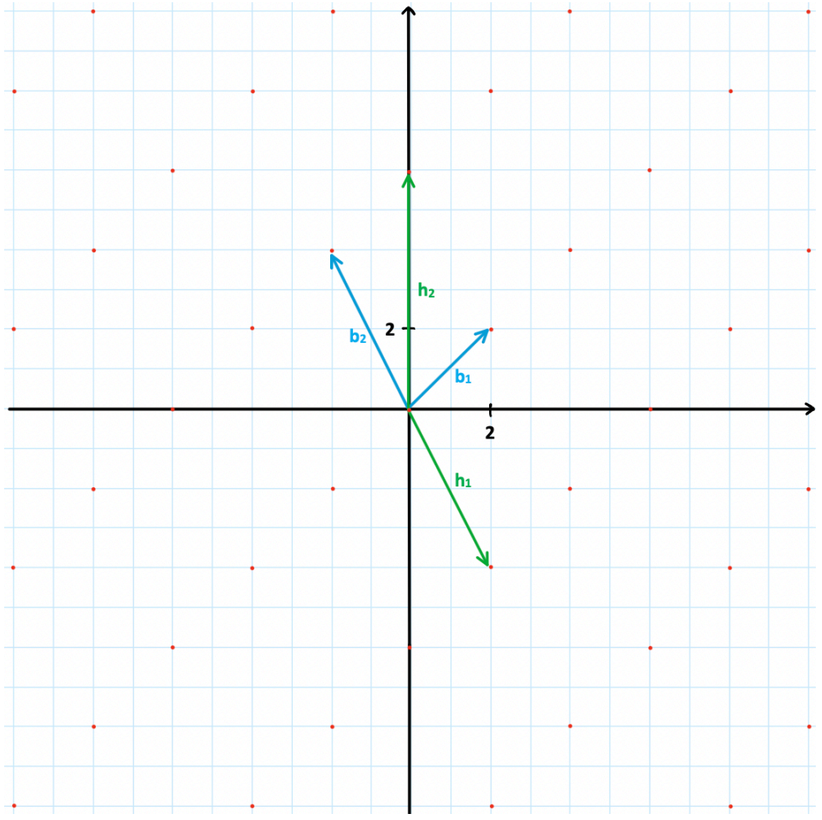


Abbildung 1: 2-dimensionales Gitter mit den Basen $B = \{b_1, b_2\}$ und $H = \{h_1, h_2\}$

In Abbildung 1 ist ein Ausschnitt des Gitters $\mathcal{L}(B)$ mit der Basis $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ durch die roten Punkte dargestellt. Wie man sehen kann, stellt $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ ebenfalls eine Basis für dasselbe Gitter dar. Hier gilt also $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(H)$.

Gitterprobleme

Es existieren verschiedene Arten von Gitterproblemen, darunter solche, die sich effizient mithilfe von Algorithmen aus der linearen Algebra lösen lassen. Beispiele hierfür sind:

- Sei $\mathcal{L}$ ein Gitter. Bestimmung, ob für einen gegebenen Vektor c gilt $c \in \mathcal{L}$.
- Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Basis, für das Gitter $\mathcal{L}$. Bestimmung einer weiteren Basis $H \neq B$ für $\mathcal{L}$.

Zusätzlich gibt es Gitterprobleme, die als besonders schwer lösbar gelten und sogar gegen Quantenalgorithmen resistent sein sollen. Aus diesem Grund dienen diese Probleme als Grundlage für Verfahren in der gitterbasierten Kryptografie. Im Folgenden werden diese kurz vorgestellt.

Shortest Vector Problem (SVP)

Sei $\mathcal{L}$ ein Gitter mit einer Basis $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, und $\lambda(\mathcal{L})$ die Länge des kürzesten Vektors in $\mathcal{L}$, der nicht der Nullvektor ist. Nun soll der Gitterpunkt gefunden werden, der dem Ursprung am nächsten liegt. Gesucht wird also ein Vector $r \in \mathcal{L}$, für den $||r|| = \lambda(\mathcal{L})$ gilt.

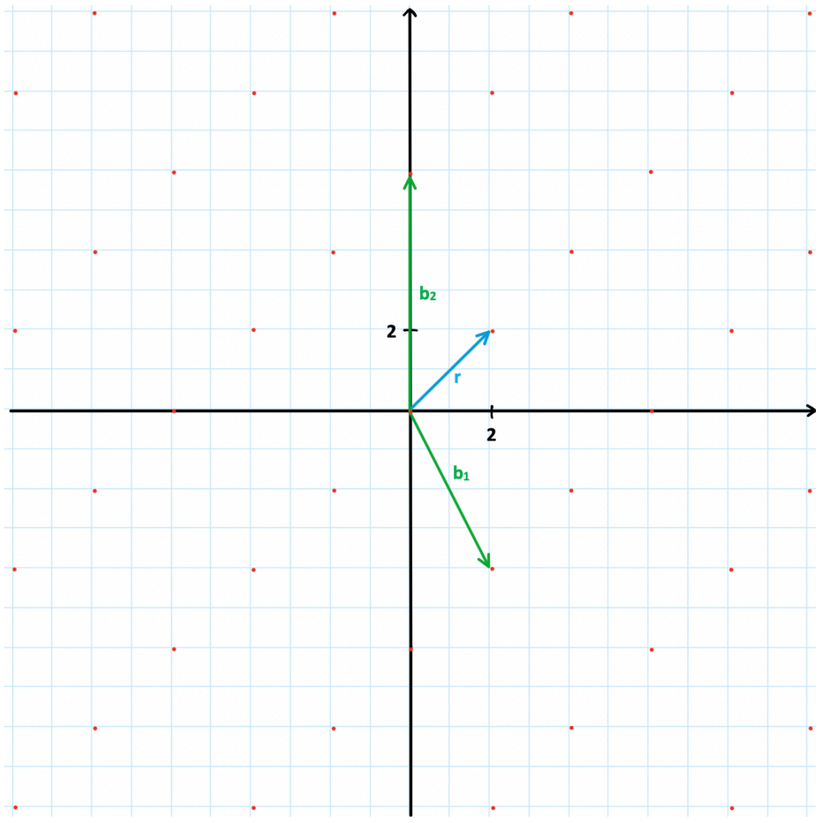
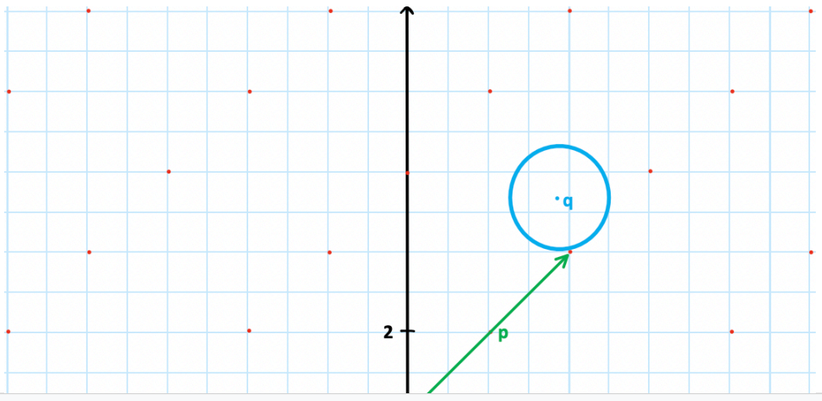


Abbildung 2: 2-dimensionales Gitter mit der Basis $B = \{b_1, b_2\}$ und dem kürzesten Vektor r

Closest Vector Problem (CVP)

Angenommen, $\mathcal{L}$ ist ein Gitter mit einer Basis $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, und $q \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt außerhalb des Gitters. Man sucht den Gitterpunkt, der q am nächsten liegt. Das Ziel besteht also darin, einen Punkt $p \in \mathcal{L}$ zu finden, für den die Distanz $||p - q||$ minimal ist.



GGH Kryptosystem

Das GGH-Kryptosystem, benannt nach seinen Entdeckern Oded Goldreich, Shafi Goldwasser und Shai Halevi, wurde 1997 vorgestellt und basiert auf der vermuteten Schwierigkeit des Closest Vector Problems. Obwohl das GGH-Kryptosystem heutzutage nicht mehr als sicher gilt, dient es aufgrund seiner einfachen Verständlichkeit als solider Ausgangspunkt, um sich tiefer mit der gitterbasierten Kryptografie zu beschäftigen. Viele seiner Elemente finden auch in aktuellen gitterbasierten Verfahren Anwendung. Im Allgemeinen funktioniert das GGH-Kryptosystem wie folgt:

- Privater Schlüssel

Als privaten Schlüssel verwendet man eine wohlgeformte Basis $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eines Gitters. Ein typischer Parameter ist beispielsweise $n = 300$. Unter einer wohlgeformten Basis versteht man eine Basis, deren Spaltenvektoren möglichst kurz sind und nahezu orthogonal zueinander stehen. Durch eine solche Basis kann man bestimmte Varianten des Closest Vector Problems in $\mathcal{L}(B)$ effizient lösen.

- Öffentlicher Schlüssel

Als öffentlichen Schlüssel verwendet man eine nicht wohlgeformte Basis H für dasselbe Gitter. Hierbei sind die enthaltenen Spaltenvektoren möglichst lang und nahezu parallel zueinander ausgerichtet. Trotz dieser Unterschiede muss $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(H)$ gelten. Kryptoanalytisch betrachtet ist die sogenannte Hermite-Normalform (HNF) von B die optimale Wahl. Dabei handelt es sich um eine ganzzahlige Matrix in oberer oder unterer Dreiecksmatrixform, die beispielsweise mithilfe des sogenannten Nemhauser/Wolsey-Algorithmus (s. 5.4.) aus B abgeleitet werden kann und eine Basis für dasselbe Gitter wie B darstellt. Die Hermite-Normalform ist eindeutig für jedes Gitter und kann aus jeder beliebigen Basis des entsprechenden Gitters berechnet werden. Anders ausgedrückt: Ein Angriff auf einen beliebigen öffentlichen Schlüssel H ist stets höchstens so schwierig wie ein Angriff auf die entsprechende Hermite-Normalform HNF(H). Aus diesem Grund verwendet man sie als öffentlichen Schlüssel.

Zusätzlich muss ein Parameter $p \in \mathbb{N}$ festgelegt werden, der den maximalen betragsmäßigen Wert der zufälligen Komponenten des Fehlervektors e bei der Verschlüsselung repräsentiert. Dieser Parameter muss so gewählt werden, dass für einen zufälligen Vektor $e \in [-p, p]^n$ der Ausdruck $\lfloor B^{-1}e \rceil = 0$ sehr wahrscheinlich und $\lfloor H^{-1}e \rceil = 0$ sehr unwahrscheinlich ist ($\lfloor a \rceil$ bedeutet, dass die Komponenten von a auf die nächste ganze Zahl gerundet werden sollen).

- Verschlüsselung

Um einen Klartext sicher zu verschlüsseln, wird er zunächst auf einen Gitterpunkt $m \in \mathcal{L}$ abgebildet. Dies geschieht, indem der Klartext als ganzzahliger Spaltenvektor $x \in \mathbb{Z}^n$ betrachtet und mit der öffentlichen Basis $Hx = m$ gebildet wird. Die einzelnen Komponenten von x repräsentieren dabei die Koeffizienten der Linearkombination mit den Spaltenvektoren von H, die den berechneten Gitterpunkt m ergeben. Anschließend wird diesem Punkt ein zufälliger Fehler $e \in [-p, p]^n$ mit ganzzahligen Komponenten aufaddiert.

- Entschlüsselung

Um den Klartext x aus einem gegebenen Geheimtext c wiederherzustellen, muss im ersten Schritt der Gitterpunkt m bestimmt werden, der c am nächsten liegt. Dieser lässt sich mithilfe der wohlgeformten Basis B und dem Rundungsverfahren von Babai wie folgt berechnen:

$$m = B\lfloor B^{-1}c \rceil$$

Das ist möglich da:

$$B\lfloor B^{-1}c \rceil = B\lfloor B^{-1}(m + e) \rceil$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$B\lfloor B^{-1}(m + e) \rceil = B(\lfloor B^{-1}m \rceil + \lfloor B^{-1}e \rceil)$$

Da $m \in \mathcal{L}$ und B ebenfalls eine Basis von $\mathcal{L}$ darstellt, entspricht $B^{-1}m$ der ganzzahligen Linearkombination von m mit den Spaltenvektoren von B und muss daher nicht mehr gerundet werden:

$$B(\lfloor B^{-1}m \rceil + \lfloor B^{-1}e \rceil) = B(B^{-1}m + \lfloor B^{-1}e \rceil)$$

Da wir sowohl von einem kleinen Fehler e als auch von kurzen Spaltenvektoren in B ausgehen, nehmen wir an, dass $\lfloor B^{-1}e \rceil = 0$ gilt. Also ist:

$$B(B^{-1}m + \lfloor B^{-1}e \rceil) = B(B^{-1}m) = BB^{-1}m = Im = m$$

Zuletzt lässt sich der Klartext x durch Auflösen von $Hx = m$ wiederherzustellen.

GGH Kryptosystem Beispiel

Betrachtet wird das zweidimensionale Gitter $\mathcal{L}$ mit der wohlgeformten Basis $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ als privater Schlüssel und der Basis H =HNF $(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ und dem Parameter $p = 1$ als öffentliche Schlüssel. Der Klartext, der verschlüsselt werden soll, ist $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man bildet also zuerst x auf einen Gitterpunkt m ab:

$$Hx = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = m$$

Nun generiert man einen zufälligen Fehler e und addiert diesen zu m:

$$m + e = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = c$$

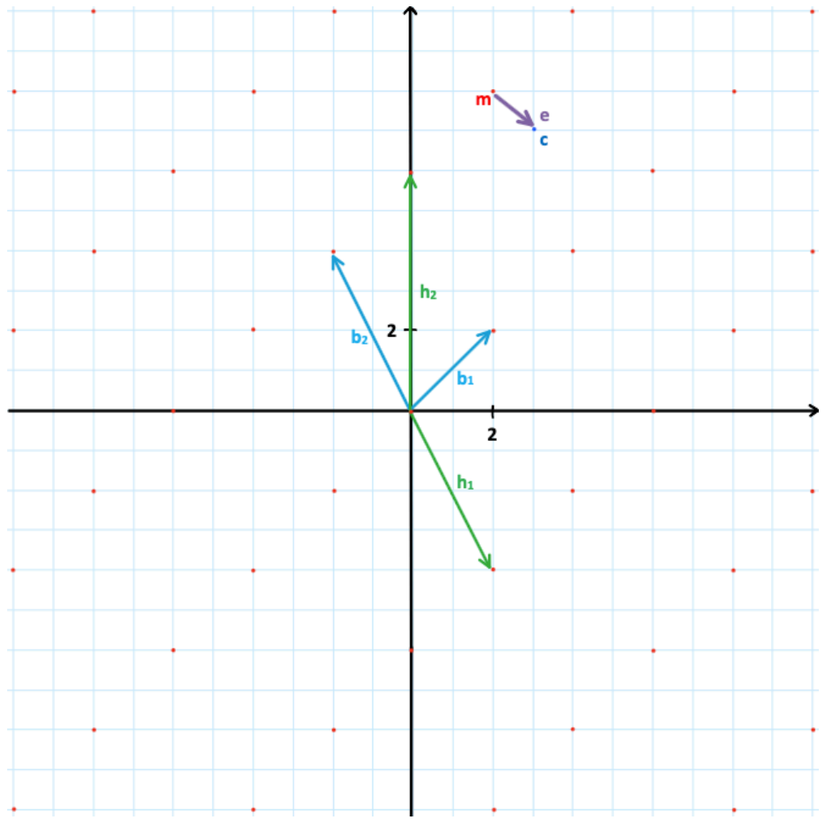


Abbildung 4: 2-dimensionales Gitter mit den Basen $B = \{b_1, b_2\}$ und $H = \{h_1, h_2\}$, dem Gitterpunkt m, dem Fehler e und dem Geheimtext c

Jetzt kann der Empfänger den Klartext x mithilfe des privaten Schlüssels B aus c wiederherstellen. Dafür rechnet man:

$$\begin{aligned} m = B\lfloor B^{-1}c \rceil &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left\lfloor \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rceil \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left\lfloor \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rceil \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left\lfloor \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rceil \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = m \end{aligned}$$

Der Empfänger kann also erfolgreich den Klartext wiederherstellen:

$$x = H^{-1}m = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sollte ein Angreifer versuchen, den Klartext mittels H wiederherzustellen, erhält dieser:

$$m_H = H\lfloor H^{-1}c \rceil = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$x_H = H^{-1}m_H = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

was nicht korrekt ist.

GGH Kryptosystem Rechner

Dieses Tool ermöglicht Ihnen die Verschlüsselung und Entschlüsselung des GGH-Kryptosystems mit benutzerdefinierten Parametern. Sie können eine Dimension d (sodass $n = d$) und im Anschluss eine Basis und einen Parameter p wählen. Danach können Sie einen Seed und die zu verschlüsselnde Nachricht festlegen.

Dimension